

# Intégrales généralisées

## Travaux dirigés

### THÈME 1 : COMPARAISON SÉRIE-INTÉGRALE

Dans la première question, on démontre les résultats du cours concernant le principe de comparaison série-intégrale puis on les utilise dans les questions suivantes.

1. Soient  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $f : [n_0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, positive et décroissante sur l'intervalle  $[n_0, +\infty[$ . On considère la série de terme général  $f(n)$ ,  $n \geq n_0$ , dont on note  $(S_n)_{n \geq n_0}$  la suite des sommes partielles :

$$\forall n \geq n_0, \quad S_n = \sum_{k=n_0}^n f(k).$$

- a. Justifier que :

$$\forall k \geq n_0 + 1, \quad \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

et en déduire que :

$$\forall n \geq n_0, \quad \int_{n_0}^{n+1} f(t) dt \leq S_n \leq f(n_0) + \int_{n_0}^n f(t) dt.$$

- b. Pour  $x \geq n_0$ , on note  $n_x = [x]$  la partie entière de  $x$ , i.e. l'unique entier tel que  $n_x \leq x < n_x + 1$ . Montrer que :

$$\int_{n_0}^{n_x} f(t) dt \leq \int_{n_0}^x f(t) dt \leq \int_{n_0}^{n_x+1} f(t) dt.$$

En déduire que l'intégrale généralisée

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$$

converge si, et seulement si, la suite

$$\left( \int_{n_0}^n f(t) dt \right)_{n \geq n_0}$$

converge.

- c. Déduire des deux questions précédentes que la série  $\sum f(n)$  et l'intégrale

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$$

sont de même nature.

2. a. Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}.$$

*Indication.* On pourra utiliser le changement de variable  $u = \ln t$ .

- b. En déduire la nature de la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$$

en fonction de  $\beta \in \mathbb{R}$ .

3. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

- a. Justifier que :

$$\forall n \geq 2, \quad \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2} \leq r_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2}.$$

- b. En déduire un équivalent de  $r_n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .