

Travaux dirigés
Révisions

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2018/2019

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 1 / 96

Exercice 1 Q 1

Exercice 1
Question 1

On utilise d'abord le développement limité de l'exponentielle :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0$$

puis celui du logarithme :

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad y \rightarrow 0.$$

Puisque

$$y = 1 - e^{-x} = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0,$$

il est possible de composer les développements limités précédents car ceux-ci sont tous deux effectués au même ordre. Le développement limité de la composée s'obtient alors en ne conservant que les termes polynomiaux de degré inférieur ou égal à 2 dans la composition des parties régulières : lorsque $x \rightarrow 0$,

$$\ln(2 - e^x) = \ln(1+y) = \left(-x - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(-x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^2) = -x - x^2 + o(x^2).$$

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 2 / 96

Exercice 1 Q 2.a

Exercice 1
Question 2.a

Puisque $e^{1/n}$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, le développement limité donne :

$$\begin{aligned} v_n &= \ln(2 - e^{1/n}) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad n \rightarrow \infty. \\ &= -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n} \leq 0, \end{aligned}$$

Par suite, la série $\sum v_n$ est divergente par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum 1/n$.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 3 / 96

Exercice 1 Q 2.b

Exercice 1
Question 2.b

Comme la série $\sum v_n$ diverge d'après a., la suite (V_n) de ses sommes partielles est divergente. De plus celle-ci est décroissante car $v_n \leq 0$ pour tout $n \geq 2$. Décroissante et divergente, la suite (V_n) admet donc pour limite $-\infty$ d'après le théorème de la limite monotone.

Les théorèmes opératoires assurent alors que $u_n = e^{V_n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 4 / 96

Exercice 1 Q 3.a

Exercice 1
Question 3.a

Il vient par télescopage, pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=2}^n (\ln(k-1) - \ln k) = -\ln n$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n (\ln(2 - e^{1/k}) - \ln(1 - \frac{1}{k})) &= V_n - \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ &= \ln u_n + \ln n = \ln(nu_n). \end{aligned}$$

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 5 / 96

Exercice 1 Q 3.b

Exercice 1
Question 3.b

La question 1. fournit :

$$\begin{aligned} \ln(2 - e^{1/n}) - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2} \leq 0 \end{aligned}$$

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 6 / 96

Exercice 1 Q 3.c

Exercice 1
Question 3.c

L'équivalent de la question précédente permet de conclure que la série

$$\sum \left(\ln(2 - e^{1/n}) - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$$

converge par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum 1/n^2$. La suite de ses sommes partielles est donc convergente. Ainsi, d'après la question a., la suite de terme général $\ln(nu_n)$, $n \geq 2$, converge vers un réel ℓ . Par suite, nu_n tend vers $\kappa = e^\ell > 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, d'où l'on déduit que $u_n \sim \kappa/n > 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Il en résulte que la série $\sum u_n$ diverge par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum 1/n$.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 7 / 96

Exercice 1 Q 4

Exercice 1
Question 4

Du grand classique ! C'est une application directe du théorème des séries alternées, qu'il faut redémontrer puisqu'il n'est pas au programme. Soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum (-1)^n u_n$:

$$\forall n \geq 2, \quad S_n = \sum_{k=2}^n (-1)^k u_k.$$

- On démontre tout d'abord que les suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont adjacentes.
 - On a :

$$\forall n \geq 1, \quad S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} = e^{V_{2n+2}} - e^{V_{2n+1}} \leq 0$$
 puisque la suite $(V_n)_{n \geq 2}$ est décroissante d'après 2.b.. La suite $(S_{2n})_{n \geq 1}$ est donc décroissante.
 - On démontre de même que la suite $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ est croissante.
 - Enfin,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$
 d'après la question 2.b..

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 8 / 96

Exercice 1 Q 4

- Adjacentes, les deux suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont donc convergentes vers une même limite S . Puisque ces deux suites recouvrent la suite complète $(S_n)_{n \geq 2}$, celle-ci converge alors elle aussi vers S .

On a ainsi démontré la convergence de la série $\sum (-1)^n u_n$.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 9 / 96

Exercice 2 Q 1.a

Exercice 2

Question 1.a

Le plus simple est de le voir comme une inégalité de convexité : la fonction est convexe (de classe \mathcal{C}^2 avec une dérivée seconde à valeurs positives ou nulles), son graphe se situe au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, d'équation $y = 1 + x$, d'où le résultat : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 10 / 96

Exercice 2 Q 1.b

Exercice 2

Question 1.b

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, n]$, l'inégalité de la question a. appliquée à $\pm \frac{t}{n}$ donne :

$$0 \leq 1 \pm \frac{t}{n} \leq e^{\pm \frac{t}{n}}$$

d'où, par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R}_+ ,

$$0 \leq \left(1 \pm \frac{t}{n}\right)^n \leq \left(e^{\pm \frac{t}{n}}\right)^n = e^{\pm t}.$$

D'après la première puis la seconde inégalité (tous les réels étant positifs), il vient alors :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n e^{-t} = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 11 / 96

Exercice 2 Q 2.a

Exercice 2

Question 2.a

On peut montrer que la fonction $x \mapsto (1-x)^n + nx - 1$ est positive sur $[0, 1]$ en étudiant ses variations ou utiliser la convexité de la fonction $x \mapsto (1-x)^n$ sur $[0, 1]$.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 12 / 96

Exercice 2 Q 2.b

Exercice 2

Question 2.b

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, n]$. Tout d'abord, l'inégalité

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

est une conséquence immédiate de la seconde inégalité de l'encadrement de la question 1.b..

Par ailleurs, la question a. appliquée à $x = \frac{t^2}{n^2} \in [0, 1]$ donne $1 - \frac{t^2}{n^2} \leq \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n$ d'où, d'après 1.b.,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

et finalement

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 13 / 96

Exercice 2 Q 3.a

Exercice 2

Question 3.a

La fonction

$$f_n : t \mapsto \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right)$$

est continue sur $]0, n]$ avec, lorsque $t \rightarrow 0$,

$$f_n(t) = \frac{1}{t} \left((1 - t + o(t)) - \left(1 - n \frac{t}{n} + o(t)\right) \right) = o(1) \rightarrow 0.$$

Ainsi f_n peut être prolongée par continuité en 0 et son intégrale I_n est donc faussement généralisée.

Remarque. Il est également possible d'utiliser l'encadrement de 2.b. pour arriver à la même conclusion par encadrement.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 14 / 96

Exercice 2 Q 3.b

Exercice 2

Question 3.b

En intégrant l'inégalité de la question 2.b., on obtient :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n} \int_0^n t e^{-t} dt \sim \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \frac{\Gamma(2)}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

d'où il résulte par encadrement que I_n converge vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 15 / 96

Exercice 2 Q 4.a

Exercice 2

Question 4.a

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[-\frac{n}{k+1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{k+1} \right]_0^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k+1} = n(a_n + \ln n). \end{aligned}$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 16 / 96

Exercice 2 Q 4.b

Exercice 2

Question 4.b

Un développement limité en tout point semblable à celui effectué en 3.a. montre que la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right)$$

a pour limite 1 en 0 ; elle peut donc être prolongée par continuité au segment $[0, n]$ et son intégrale J_n est donc bien définie. Il vient, par sommation de termes en progression géométrique de raison $1 - \frac{t}{n} \neq 1$ si $t \neq 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n} \right)^k dt &= \int_{[0,n]} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{t}{n} \right)^k \right) dt = \int_0^n \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n}{1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)} dt \\ &= n \int_0^n \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) dt = nJ_n \end{aligned}$$

d'où, par comparaison au résultat obtenu en a., $J_n = a_n + \ln n$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 17 / 96

Exercice 2 Q 5.a

Exercice 2

Question 5.a

La fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, 1]$ et admet pour limite 1 en 0 (d'après l'équivalent usuel de $e^u - 1$ lorsque $u \rightarrow 0$) donc peut être prolongée par continuité en 0, son intégrale U est donc bien définie.

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{2t}$ ou $t \mapsto e^{-t}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, d'où la convergence de l'intégrale V par comparaison à une intégrale de référence (de Riemann ou exponentielle).

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 18 / 96

Exercice 2 Q 5.b

Exercice 2

Question 5.b

Il vient d'après 3.b. et 4.b. :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = J_n - \ln n = I_n + \int_0^n \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^n \frac{dt}{t} \\ = I_n + \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U - V, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 19 / 96

Exercice 3 Q 1.a

Exercice 3

Question 1.a

Soient $n \geq 1$ et $t \in [0, 1[$. En utilisant l'identité remarquable

$$1 - t^n = (1-t)(1+t+t^2+\dots+t^{n-1}),$$

on obtient :

$$\frac{1}{1+t+t^2+\dots+t^{n-1}} - (1-t) = (1-t) \left(\frac{1}{1-t^n} - 1 \right) = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}.$$

Il en résulte que :

$$\forall t \in [0, 1[, \quad 0 \leq \frac{1}{1+t+t^2+\dots+t^{n-1}} - (1-t) \leq \frac{(1-t)t^n}{1-t} = t^n$$

d'où, par croissance de l'intégrale (les fonctions sont continues sur le segment $[0, 1]$) :

$$0 \leq u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t+t^2+\dots+t^{n-1}} - (1-t) \right) dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit par encadrement que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 20 / 96

Exercice 3 Q 1.b

Exercice 3

Question 1.b

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le changement de variable $u \mapsto t = u^{1/n}$, de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissant de $]0, 1[$ sur lui-même, donne :

$$u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{(1-t)t^n}{1-t^n} dt = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{(1-u^{1/n})u^{1/n}}{1-u} du = \frac{v_n}{n}.$$

On remarquera que l'intégrale centrale converge par opérations sur des intégrales convergentes (car fassusement généralisées), d'où l'on déduit la convergence de l'intégrale v_n .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 21 / 96

Exercice 3 Q 2.a

Exercice 3

Question 2.a

Pour $k \geq 1$, on a :

$$\frac{(\ln x)^k}{x-1} \sim \frac{(x-1)^k}{x-1} \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \geq 2 \end{cases}, \quad x \rightarrow 1.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 22 / 96

Exercice 3 Q 2.b

Exercice 3

Question 2.b

Pour $k \geq 1$, la fonction

$$f_k : x \mapsto \frac{(\ln x)^k}{x-1}$$

est continue sur $]0, 1[$. Elle est prolongeable par continuité en 1 d'après a.. On a par ailleurs

$$\sqrt{x} f_k(x) \sim -\sqrt{x} (\ln x)^k \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0$$

d'où

$$f_k(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x \rightarrow 0$$

et la convergence absolue de $\int_0^1 f_k(x) dx$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 23 / 96

Exercice 3 Q 2.c

Exercice 3

Question 2.c

Soit $x \in]-\infty, 0]$. La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur $[x, 0]$ avec :

$$\forall t \in [x, 0], \quad f'(t) = e^t - 2e^{2t}, \quad f''(t) = e^t - 4e^{2t}.$$

Pour $t \in [x, 0]$, on a $-1 \leq 4e^t - 1 \leq 4 - 1 = 3$, d'où

$$\forall t \in [x, 0], \quad |f''(t)| = e^t |4e^t - 1| \leq 3.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée à la fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur $[x, 0]$, il vient alors :

$$|f(x) - f(0) - (x-0)f'(0)| = |e^x - e^{2x} + x| \leq \frac{(x-0)^2}{2!} \sup_{t \in [0,x]} |f''(t)| \leq \frac{3x^2}{2}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 24 / 96

Exercice 3 Q 3.a

Exercice 3

Question 3.a

Soit $n \geq 1$. Pour $u \in]0, 1[$, l'inégalité de la question 2.c. appliquée à $x = \frac{\ln u}{n}$ amène :

$$\left| u^{1/n} - u^{2/n} + \frac{\ln u}{n} \right| = \left| e^{(\ln u)/n} - e^{2(\ln u)/n} + \frac{\ln u}{n} \right| \leq \frac{3(\ln u)^2}{2n^2}.$$

Puisque l'intégrale du membre droite sur l'intervalle $]0, 1[$ converge d'après la question 2.b., on en déduit que :

$$\begin{aligned} \left| v_n + \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u} du \right| &= \left| \int_0^1 \left(u^{1/n} - u^{2/n} + \frac{\ln u}{n} \right) \frac{du}{1-u} \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| u^{1/n} - u^{2/n} + \frac{\ln u}{n} \right| \frac{du}{1-u} \\ &\leq \frac{3}{2n^2} \int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u} du. \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 25 / 96

Exercice 3 Q 3.b

Exercice 3

Question 3.b

De la question a., on déduit par encadrement que :

$$v_n + \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

c'est-à-dire que

$$v_n \sim -\frac{1}{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

On déduit alors de la question 1. que :

$$u_n - \frac{1}{2} \sim -\frac{1}{n^2}, \quad n \rightarrow \infty,$$

qui s'écrit encore :

$$u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 26 / 96

Exercice 4 Q 1.a

Exercice 4

Question 1.a

La fonction $f : t \mapsto e^{-\sqrt{\ln t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- La fonction f est prolongeable par continuité en 0, si bien que l'intégrale $\int_{-\infty}^1 f(t) dt$ est faussement généralisée donc convergente.
- Pour $\alpha > 1$,

$$t^\alpha f(t) = \exp(\alpha \ln t + \sqrt{\ln t}) = \exp(\alpha \ln t + o(\ln t)) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty.$$
 Cela met en évidence, pour $\alpha = 1$ en particulier, que

$$0 \leq \frac{1}{t} = o(f(t)), \quad t \rightarrow +\infty,$$
 d'où l'on déduit la divergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ par comparaison à l'intégrale de Riemann divergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$.

Remarque. Le deuxième point suffit pour prouver la divergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 27 / 96

Exercice 4 Q 1.b

Exercice 4

Question 1.b

La fonction $f : t \mapsto \sqrt[3]{t^3 + t} - t$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Lorsque $t \rightarrow +\infty$,

$$f(t) = t \left[\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^{1/3} - 1 \right] = t \left[\frac{1}{3t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \right] \sim \frac{1}{3t} \geq 0,$$

si bien que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ diverge par comparaison à l'intégrale de Riemann divergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 28 / 96

Exercice 4 Q 2

Exercice 4

Question 2

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2 + t\sqrt{t^2 - 1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$.

- Lorsque $t \rightarrow +\infty$,

$$t^2 + t\sqrt{t^2 - 1} - 1 = t^2 + t(o(t)) + o(t^2) = 2t^2 + o(t^2) \sim 2t^2$$
 si bien que

$$f(t) \sim \frac{1}{2t^2} \geq 0, \quad t \rightarrow +\infty$$
 et l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ converge par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.
- Lorsque $t \rightarrow 1$,

$$f(t) = \frac{1}{t + \sqrt{t^2 - 1}} \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} \sim \frac{1}{\sqrt{(t+1)(t-1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t-1}} \geq 0,$$
 d'où l'on déduit la convergence de l'intégrale $\int_1^2 f(t) dt$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t-1}}$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est donc convergente. Le changement de variable à venir en donnera une nouvelle justification.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 29 / 96

Exercice 4 Q 2

La fonction $\psi : t \mapsto u = t + \sqrt{t^2 - 1}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$ avec :

$$\forall t > 1, \quad \psi'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{t + \sqrt{t^2 - 1}}{\sqrt{t^2 - 1}} > 0. \quad (*)$$

Elle est donc de plus strictement croissante et réalise donc une bijection de $]1, +\infty[$ sur lui-même. Puisque ψ' ne s'annule pas, la réciproque $\varphi = \psi^{-1} : u \mapsto t$ est donc de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissante de $]1, +\infty[$ sur lui-même. C'est donc un changement de variable admissible, que l'on peut mener sans chercher à expliciter φ ni φ' (c'est l'intérêt de cet exemple), en écrivant abusivement (*) sous la forme :

$$\frac{du}{u} = \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}.$$

Il vient alors :

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t + \sqrt{t^2 - 1}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2} = 1.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 30 / 96

Exercice 4 Q 3

Exercice 4

Question 3

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln n! = \sum_{k=2}^n \ln k$$

où, par croissance de la fonction \ln sur $[1, +\infty[$,

$$\forall k \geq 2, \quad \int_{k-1}^k \ln t dt \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t dt$$

si bien que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_1^n \ln t dt \leq \ln n! \leq \int_2^{n+1} \ln t dt. \quad (*)$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 31 / 96

Exercice 4 Q 3

Comme

$$\int_1^n \ln t dt = [t \ln t - t]_1^n = n \ln n - n + 1 = n \ln n + o(n \ln n) \sim n \ln n, \quad n \rightarrow \infty$$

et de même

$$\int_2^{n+1} \ln t dt = (n+1) \ln(n+1) + o(n \ln n) \sim n \ln n, \quad n \rightarrow \infty,$$

on justifie par encadrement après avoir divisé tous les membres de (*) par $n \ln n$ que :

$$\ln n! \sim n \ln n, \quad n \rightarrow \infty.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 32 / 96

Exercice 5 Q 1.a

Exercice 5

Question 1.a

Pour $i \in [1, n-1]$, la i -ième colonne de la matrice C donne les coordonnées du vecteur $f(e_i)$ dans la base \mathcal{B} : ainsi $f(e_i) = e_{i+1}$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 33 / 96

Exercice 5 Q 1.b

Exercice 5

Question 1.b

On commence par démontrer par récurrence sur $j \in [1, n-1]$ le prédicat \mathcal{P}_j : « $f^j(e_1) = e_{j+1}$ » :

- On a tout d'abord $f(e_1) = e_2$ d'après la question a. ; ainsi la propriété \mathcal{P}_1 est vraie.
- Puis, si la propriété \mathcal{P}_j est vraie pour un entier $j < n-1$ alors, toujours d'après a., $f^{j+1}(e_1) = f(f^j(e_1)) = f(e_{j+1}) = e_{j+2}$ car $j+1 \leq n-1$, et la propriété \mathcal{P}_{j+1} est démontrée.

On a donc démontré que $f^j(e_1) = e_{j+1}$ pour tout $j \in [1, n-1]$ d'après le principe de récurrence.

Par suite, toujours par lecture sur la matrice C , il vient

$$f^n(e_1) = f(f^{n-1}(e_1)) = f(e_n) = -(a_0 e_1 + a_1 e_2 + \dots + a_{n-1} e_n).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 34 / 96

Exercice 5 Q 2.a

Exercice 5

Question 2.a

Il résulte immédiatement des formules établies en 1.b. que $g(e_1) = 0$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 35 / 96

Exercice 5 Q 2.b

Exercice 5

Question 2.b

Les endomorphismes f^i et g commutent comme polynômes en f :

$$g \circ f^i = f^i \circ g = f^{n+i} + a_{n-1} f^{n-1+i} + \dots + a_1 f^{1+i} + a_0 f^i.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 36 / 96

Exercice 5 Q 2.c

Exercice 5

Question 2.c

Il en résulte, d'après 1.b., que pour tout $i \in [1, n]$,

$$g(e_i) = g(f^{i-1}(e_1)) = f^{i-1}(g(e_1)) = 0.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 37 / 96

Exercice 5 Q 2.d

Exercice 5

Question 2.d

L'endomorphisme g , nul sur les vecteurs de la base \mathcal{B} , est donc identiquement nul. Ainsi $P(f) = g = 0$ et P est annulateur de f .

Application 1. On en déduit que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

matrice compagnon du polynôme $X^5 - X^3 - 2X^2 - 1$, est annulée par celui-ci : $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 38 / 96

Exercice 5 Q 2.e

Exercice 5

Question 2.e

C'est du cours : si λ est valeur propre de C , il existe un vecteur $X \in \mathbf{M}_{n,1}(C)$ non nul tel que $CX = \lambda X$. On démontre alors, par une récurrence simple, que $C^i X = \lambda^i X$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, si bien que

$$\begin{aligned} P(C)X &= C^n X + \sum_{i=0}^{n-1} a_i C^i X = \lambda^n X + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i X \\ &= \left(\lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i \right) X = P(\lambda)X. \end{aligned}$$

Comme par ailleurs $P(C) = 0$ d'après d. (puisque C représente f) et $X \neq 0$, on en déduit que $P(\lambda) = 0$. Ainsi les valeurs propres de C sont racines du polynôme P .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 39 / 96

Exercice 5 Q 3.a

Exercice 5

Question 3.a

D'après 1.b.,

$$Q(f)(e_1) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(e_1) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_{i+1}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 40 / 96

Exercice 5 Q 3.b

Exercice 5

Question 3.b

Si $Q = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i$ annule f , on a $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_{i+1} = 0$ d'après la question a. d'où l'on déduit, puisque la famille \mathcal{B} est libre, que $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, c'est-à-dire que $Q = 0$. Ainsi seul le polynôme nul est annulateur de f parmi les polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 41 / 96

Exercice 5 Q 3.c

Exercice 5

Question 3.c

Il s'agit d'établir que $P(f) = (f - \lambda \text{id}) \circ R(f)$, si tant est que ce ne soit pas évident. Or, si l'on note $P = (X - \lambda)R = Q - \lambda R$ où $Q = XR$, alors

$$(f - \lambda \text{id}) \circ R(f) = f \circ R(f) - \lambda R(f) = Q(f) - \lambda R(f) = P(f).$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 42 / 96

Exercice 5 Q 3.d

Exercice 5

Question 3.d

Soit λ racine de P . D'après la question c., il existe alors un polynôme R de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $(f - \lambda \text{id}) \circ R(f) = 0$. Si λ n'est pas valeur propre de f , alors $f - \lambda \text{id}$ est inversible et la relation précédente implique donc $R(f) = 0$, qui implique à son tour $R = 0$ d'après la question b. puis $P = 0$, ce qui est en contradiction avec la définition de P . C'est donc que λ est valeur propre de f . Ainsi toute racine de P est valeur propre de f .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 43 / 96

Exercice 5 Q 4.a

Exercice 5

Question 4.a

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$C - xI_n = \begin{pmatrix} -x & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & \cdots & (0) & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} - x \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que la matrice précédente est de rang supérieur ou égal à $n-1$, il suffit de justifier que les $n-1$ premières colonnes sont linéairement indépendantes. On peut simplement faire remarquer qu'elles forment une famille échelonnée donc libre. Un argument peut-être un peu plus précis peut consister à faire observer qu'en ajoutant à gauche le premier vecteur de la base canonique, on obtient une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls donc inversible; ainsi ses vecteurs colonnes forment une famille libre.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 44 / 96

Exercice 5 Q 4.a

Exercice 5

Si λ est valeur propre de C , alors $C - \lambda I_n$ n'est pas inversible donc, d'après ce qui précède, $n-1 \leq \text{rg}(C - \lambda I_n) < n$ c'est-à-dire $\text{rg}(C - \lambda I_n) = n-1$. Dans ces conditions, le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme $f - \lambda \text{id}$ assure que le sous-espace propre $E_\lambda(C)$ de C pour la valeur propre λ a pour dimension

$$\begin{aligned} \dim E_\lambda(C) &= \dim E_\lambda(f) = \dim \text{Ker}(f - \lambda \text{id}) \\ &= n - \text{rg}(f - \lambda \text{id}) = n - \text{rg}(C - \lambda I_n) = 1. \end{aligned}$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 45 / 96

Exercice 5 Q 4.b

Exercice 5

Question 4.b

Par théorème, la matrice C est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n . Or chacun de ces sous-espaces est de dimension 1 d'après la question a.. La somme de leurs dimensions est donc égale au nombre de ces sous-espaces, c'est-à-dire au nombre de valeurs propres de C . Comme les valeurs propres de C sont exactement les racines du polynôme P d'après les questions 2.e. et 3.d., on en déduit donc que la matrice C est diagonalisable si, et seulement si, P admet n racines deux-à-deux distinctes.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 45 / 96

Exercice 5 Q 5.a

Exercice 5

Question 5.a

La matrice A_1 est la matrice compagnon du polynôme

$$P_1 = X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$$

de degré 4. Ce dernier admettant 4 racines deux-à-deux distinctes, la matrice A_1 est diagonalisable d'après la question 4.b..

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 47 / 96

Exercice 5 Q 5.b

Exercice 5

Question 5.b

La matrice A_2 est la matrice compagnon du polynôme

$$P_2 = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 8X - 4.$$

Puisque 1 est en racine évidente, le polynôme P_2 se factorise par $X - 1$:

$$P_2 = (X - 1)(X^3 - X^2 - 4X + 4)$$

puis l'on peut à nouveau factoriser le facteur de droite par $X - 1$. Ainsi 1 est racine multiple de P_2 qui ne peut donc admettre 4 racines deux-à-deux distinctes. Par suite, la matrice A_2 n'est pas diagonalisable d'après 4.b..

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 48 / 96

Exercice 5 Q 6.a

Exercice 5

Question 6.a

Pour $t \in \mathbb{C}$, les matrices $M = B - tI_n$ et $C - tI_n$ sont transposées l'une de l'autre. Il s'agit donc de démontrer que M est inversible si, et seulement si, tM est inversible. C'est une propriété du cours : si M est inversible alors, en transposant la relation $MM^{-1} = M^{-1}M = I_n$, on obtient $(M^{-1})^t M^t = {}^tM (M^{-1})^t = I_n$, d'où l'on déduit que tM est inversible, d'inverse $({}^tM)^{-1} = (M^{-1})^t$ ce qui démontre une implication. En appliquant ce résultat à tM , on obtient la réciproque.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 49 / 96

Exercice 5 Q 6.b

Exercice 5

Question 6.b

Un complexe λ est valeur propre de B si, et seulement si, la matrice $B - \lambda I_n$ n'est pas inversible ce qui signifie, d'après a., que la matrice $(B - \lambda I_n)^t = C - \lambda I_n$ n'est pas inversible ou encore que λ est valeur propre de C . Les matrices B et C ont donc mêmes valeurs propres.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 50 / 96

Exercice 5 Q 6.c

Exercice 5

Question 6.c

Puisque le complexe λ est valeur propre de B donc de C d'après b., il est aussi racine de P d'après 2.e.. On pose alors les équations du sous-espace propre $E_\lambda(B)$ de B pour la valeur propre λ : pour $X = {}^t(x_1 \ \dots \ x_n) \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$,

$$BX = \lambda X \iff \begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 = 0 \\ -\lambda x_2 + x_3 = 0 \\ \vdots \\ -\lambda x_{n-1} + x_n = 0 \\ -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n - \lambda x_n = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ -a_0 x_1 - a_1 \lambda x_1 - \dots - a_{n-1} \lambda^{n-1} x_1 - \lambda^n x_1 = 0 \end{cases}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 51 / 96

Exercice 5 Q 6.c

La dernière ligne s'écrit encore $P(\lambda)x_1 = 0$ et est donc automatiquement satisfaite puisque $P(\lambda) = 0$. Le sous-espace propre $E_\lambda(B)$ est donc la droite dirigée par le vecteur ${}^t(1 \ \lambda \ \lambda^2 \ \dots \ \lambda^{n-1})$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 52 / 96

Exercice 5 Q 6.d

Exercice 5

Question 6.d

Si P admet n racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux-à-deux distinctes, ce sont autant de valeurs propres de C d'après 3.d. donc de B d'après b.. Dans ces conditions, la matrice B est diagonalisable. Les colonnes de la matrice V , propres pour B d'après c. associées à des valeurs propres deux-à-deux distinctes, forment une famille libre de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. La matrice carrée V est donc inversible et l'on a, d'après la formule de changement de base appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à B :

$$V^{-1}BV = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 53 / 96

Exercice 5 Q 7.a

Exercice 5

Question 7.a

Par théorème, si l'endomorphisme u présente n valeurs propres deux-à-deux distinctes en dimension n , alors il est diagonalisable.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 54 / 96

Exercice 5 Q 7.b

Exercice 5

Question 7.b

On montre par récurrence sur $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u^i(\varepsilon_j) = \mu_j^i \varepsilon_j$. On a donc :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad u^i(a) = u_i \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \right) = \sum_{j=1}^n u^i(\varepsilon_j) = \sum_{j=1}^n \mu_j^i \varepsilon_j.$$

La famille \mathcal{B}_a est donc représentée en base $\underline{\varepsilon}$ par la matrice

$$W = \begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_1^2 & \dots & \mu_1^{n-1} \\ 1 & \mu_2 & \mu_2^2 & \dots & \mu_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \mu_n & \mu_n^2 & \dots & \mu_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Comme tW est inversible d'après 6.d. puisque μ_1, \dots, μ_n sont deux-à-deux distincts, sa transposée W l'est aussi d'après 6.a. et la famille \mathcal{B}_a est donc une base de E .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 55 / 96

Exercice 5 Q 7.c

Exercice 5

Question 7.c

Pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $u(u^{j-1}(a)) = u^j(a)$, d'où l'on déduit les $n-1$ premières colonnes de la matrice de u dans la base \mathcal{B}_a , qui est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \beta_0 \\ 1 & \dots & \dots & (0) & \dots & \beta_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & (0) & \dots & \dots & 0 & \beta_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \beta_{n-1} \end{pmatrix}.$$

C'est donc la matrice compagnon du polynôme

$$P_1 = X^n - \beta_{n-1}X^{n-1} - \dots - \beta_1X - \beta_0.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 56 / 96

Exercice 6 Q 1.a

Exercice 6

Question 1.a

L'application Φ_A est clairement linéaire :

$$\forall M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A \\ &= \lambda(AM - MA) + (AN - NA) \\ &= \lambda\Phi_A(M) + \Phi_A(N) \end{aligned}$$

et à valeurs dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, c'est donc un endomorphisme de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 57 / 96

Exercice 6 Q 1.b

Exercice 6

Question 1.b

Il vient $\Phi_A(I_n) = 0$, si bien que $\text{Ker } \Phi_A$ n'est pas réduit à $\{0\}$. L'application linéaire Φ_A n'est donc pas injective, et par suite pas surjective puisqu'il s'agit d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 58 / 96

Exercice 6 Q 2.a

Exercice 6

Question 2.a

La matrice A étant triangulaire, elle admet ses coefficients diagonaux pour valeurs propres : 1 et 3. Carrée d'ordre 2 avec 2 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 59 / 96

Exercice 6 Q 2.b

Exercice 6

Question 2.b

Le calcul de

$$\begin{aligned} \Phi_A(E_{1,1}) &= -E_{1,2}, & \Phi_A(E_{1,2}) &= -2E_{1,2}, \\ \Phi_A(E_{2,1}) &= E_{1,1} + 2E_{2,1} - E_{2,2} & \text{et } \Phi_A(E_{2,2}) &= E_{1,2} \end{aligned}$$

conduit à la matrice représentant Φ_A en base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 2 car, en notant C_1, C_2, C_3, C_4 ses colonnes, on a $C_1 = -C_4$, $C_2 = -2C_4$ et par ailleurs (C_3, C_4) libre.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 60 / 96

Exercice 6 Q 2.c

Exercice 6

Question 2.c

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \text{rg}(H - \lambda I_4) &= \text{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1}{L_1 \leftrightarrow L_2} = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -\lambda - 2 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda^2 + 2\lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} 4 & \text{si } \lambda \notin \{-2, 0, 2\} \\ 3 & \text{si } \lambda \in \{-2, 2\} \\ 2 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

si bien que H admet pour valeurs propres $-2, 0$ et 2 .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 61 / 96

Exercice 6 Q 2.c

Le théorème du rang donne par ailleurs :

$$\forall \lambda \in \text{Sp } H, \quad \dim E_\lambda(H) = 4 - \text{rg}(H - \lambda I_4),$$

si bien que $E_0(H)$ est de dimension 2 alors que $E_{-2}(H)$ et $E_2(H)$ sont de dimension 1.

Ainsi la somme des dimensions des sous-espaces propres de H , carrée d'ordre 4, est-elle égale à 4, ce qui signifie que H est diagonalisable.

L'endomorphisme Φ_A , représenté par H , est donc également diagonalisable avec $-2, 0$ et 2 pour valeurs propres.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 62 / 96

Exercice 6 Q 3.a

Exercice 6

Question 3.a

Sachant A diagonalisable, il existe $P \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $D \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. En transposant la relation, il vient ${}^t P A^t P^{-1} = {}^t D = D$, si bien que ${}^t A$ est semblable à D donc est diagonalisable.

Les matrices A et ${}^t A$, toutes deux semblables à D , ont alors les mêmes valeurs propres : celles de D , c'est-à-dire ses coefficients diagonaux.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 63 / 96

Exercice 6 Q 3.b

Exercice 6

Question 3.b

On note $X = {}^t(x_1 \ \cdots \ x_n)$ et $Y = {}^t(y_1 \ \cdots \ y_n)$ les deux colonnes propres considérées, ainsi que λ et μ les valeurs propres associées.

D'une part, $M = X^t Y$ est une matrice non nulle de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ car elle a pour coefficient générique $m_{i,j} = x_i y_j$, $1 \leq i, j \leq n$. Sachant les colonnes X et Y non nulles, il existe $i_0, j_0 \in [1, n]$ tels que $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$ et alors $m_{i_0, j_0} \neq 0$.

D'autre part, le calcul montre que

$$\Phi_A(M) = (AX)^t Y - X^t ({}^t A Y) = \lambda X^t Y - \mu X^t Y = (\lambda - \mu)M.$$

La matrice M est donc vecteur propre de l'endomorphisme Φ_A .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 64 / 96

Exercice 6 Q 3.c

Exercice 6

Question 3.c

Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Puisque (X_1, \dots, X_n) est une base de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $V_j = \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k$.

Il existe de même $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $V_j = \sum_{\ell=1}^n \beta_\ell Y_\ell$.

On a alors :

$$V_i^t V_j = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \alpha_k \beta_\ell X_k^t Y_\ell.$$

Puisque les vecteurs $V_i^t V_j$, $1 \leq i, j \leq n$, composent la base canonique de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, il en ressort que la famille \mathcal{F} engendre l'espace vectoriel $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Formée de $n^2 = \dim \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ vecteurs, c'en est donc une base.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 65 / 96

Exercice 6 Q 3.d

Exercice 6

Question 3.d

La matrice A étant diagonalisable par hypothèse, il existe une base (X_1, \dots, X_n) de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de colonnes propres de A . Il existe de même d'après **a.** une base (Y_1, \dots, Y_n) de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de colonnes propres de ${}^t A$.

Dans ces conditions, les questions **b.** et **c.** assurent que la famille $(X_i^t Y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de l'endomorphisme Φ_A , qui est donc diagonalisable.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 66 / 96

Exercice 6 Q 3.e

Exercice 6

Question 3.e

On conserve les notations de la question précédente, et l'on note de plus $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (resp. μ_1, \dots, μ_n) les valeurs propres de A (resp. de ${}^t A$) associées aux colonnes propres X_1, \dots, X_n (resp. Y_1, \dots, Y_n).

D'après les questions **b.** et **d.**, les matrices $X_i^t Y_j$, $1 \leq i, j \leq n$, sont des vecteurs propres de Φ_A pour les valeurs propres $\lambda_i - \mu_j$, qui forment une base de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Sachant que A et ${}^t A$ ont mêmes valeurs propres d'après **a.**, les valeurs propres de Φ_A sont donc les réels de la forme $\lambda - \mu$, où λ et μ sont des valeurs propres de A .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 67 / 96

Exercice 6 Q 4.a

Exercice 6

Question 4.a

Le résultat est immédiat pour $k = 1$: $\Phi_A(T) = \lambda T$ par hypothèse. S'il est acquis à un entier $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned} \Phi_A(T^{k+1}) &= AT^{k+1} - T^{k+1}A = (\Phi_A(T^k) + T^k A)T - T^{k+1}A \\ &= \lambda k T^{k+1} + T^k \Phi_A(T) = \lambda(k+1)T^{k+1}. \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 68 / 96

Exercice 6 Q 4.b

Exercice 6

Question 4.b

Si T^k était non nul pour tout $k \in \llbracket 0, n^2 \rrbracket$, la famille $(T^k)_{0 \leq k \leq n^2}$ serait formée de vecteurs propres de Φ_A pour des valeurs propres deux-à-deux distinctes (car $\lambda \neq 0$) d'après **a.** Elle serait donc libre, alors qu'elle est formée de $n^2 + 1 > \dim \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ vecteurs, ce qui est absurde.

Il existe donc un entier $q \leq n^2$ tel que $T^q = 0$. Un tel entier est nécessairement non nul car $T^0 = I_n \neq 0$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 69 / 96

Exercice 6 Q 4.c

Exercice 6

Question 4.c

Si l'on avait $T^{p-1}X = 0$ pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice T^{p-1} , qui représente l'endomorphisme $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto T^{p-1}X$ en base canonique, serait nulle, en contradiction avec la définition de p . C'est donc qu'il existe $X_0 \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $T^{p-1}X_0 \neq 0$. Pour tout $k \geq p$, on a en revanche $T^k X_0 = 0$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 70 / 96

Exercice 6 Q 4.c

Exercice 6

Question 4.c

Étant donnés $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{j=0}^{p-1} T^j X_0 = 0$, on montre alors par récurrence forte sur $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ que $\alpha_k = 0$:

- Tout d'abord, $\alpha_0 T^{p-1} X_0 = T^{p-1} \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i T^i X_0 = 0$, d'où l'on déduit que $\alpha_0 = 0$ puisque $T^{p-1} X_0 \neq 0$.
- Si $\alpha_0 = \dots = \alpha_k = 0$ pour un entier $k < p-1$, alors

$$\alpha_{k+1} T^{p-1} X_0 = T^{p-1-k-1} \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i T^i X_0 = 0,$$

d'où il ressort de même que $\alpha_{k+1} = 0$.

Remarque. On peut aussi raisonner par l'absurde et mener le même type de raisonnement à partir du plus petit entier k pour lequel $\alpha_k \neq 0$ afin d'obtenir une contradiction.

Le famille $(X_0, TX_0, \dots, T^{p-1}X_0)$, formée de p vecteurs, étant libre dans l'espace $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension n , on a nécessairement $p \leq n$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 71 / 96

Exercice 6 Q 5.a

Exercice 6

Question 5.a

On rappelle que le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est défini par les deux expressions suivantes : pour $M = (m_{ij}), N = (n_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle M, N \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{ij} n_{ij} = \text{tr}(MN).$$

Pour $M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on a par propriété de la trace (HP, à redémontrer ?) :

$$\langle M^t N, I_n \rangle = \text{tr}({}^t(M^t N) I_n) = \text{tr}(N^t M) = \text{tr}({}^t(MN)) = \langle M, N \rangle.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 72 / 96

Exercice 6 Q 5.b

Exercice 6

Question 5.b

La matrice P étant orthogonale, ses colonnes forment une base orthonormale de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ euclidien canonique :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad {}^t C_i C_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 73 / 96

Exercice 6 Q 5.c

Exercice 6

Question 5.c

En notant $P = (p_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, on a :

$$\forall k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (C_i {}^t C_j)_{k,\ell} = p_{k,i} p_{\ell,j}.$$

Il vient alors :

$$\langle C_i {}^t C_j, I_n \rangle = \sum_{k=1}^n (C_i {}^t C_j)_{k,k} = \sum_{k=1}^n p_{k,i} p_{k,j} = {}^t C_i C_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{i,j}.$$

Remarque. Inutile d'en revenir aux coefficients : en utilisant les propriétés de la trace, on obtient directement

$$\langle C_i {}^t C_j, I_n \rangle = \text{tr}({}^t (C_i {}^t C_j) I_n) = \text{tr}(C_i {}^t C_j) = \text{tr}({}^t C_i C_j) = {}^t C_i C_j.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 74 / 96

Exercice 6 Q 5.d

Exercice 6

Question 5.d

D'après a. et b. et c., il vient par exportativité des scalaires :

$$\begin{aligned} \langle C_i {}^t C_j, C_k {}^t C_\ell \rangle &= \langle C_i {}^t C_j (C_k {}^t C_\ell), I_n \rangle = \langle C_i ({}^t C_j C_k) {}^t C_\ell, I_n \rangle \\ &= ({}^t C_j C_k) \langle C_i {}^t C_\ell, I_n \rangle = \delta_{j,\ell} \delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (k,\ell) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 75 / 96

Exercice 6 Q 5.e

Exercice 6

Question 5.e

La famille \mathcal{G} est orthonormale d'après d. donc libre. Formée de $n^2 = \dim \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ vecteurs, c'est donc une base orthonormale de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Par ailleurs, la formule de changement de base permet de réinterpréter l'identité $P^{-1}AP = D$ diagonale : les colonnes C_1, \dots, C_n sont propres pour A et donc aussi pour $\mathcal{A} = A$. Dans ces conditions, la question 3.b. assure que les matrices $C_i {}^t C_j$, $1 \leq i, j \leq n$, sont autant de vecteurs propres de Φ_A .

On retrouve donc ainsi le fait que l'endomorphisme Φ_A est diagonalisable... et même un peu plus ici : il est symétrique car représenté par une matrice diagonale donc symétrique dans une base orthonormale.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 76 / 96

Exercice 7 Q 1.a

Exercice 7

Question 1.a

On admet que la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]-1, +\infty[$. Elle admet donc un développement limité à tout ordre N au voisinage de 0, donné par la formule de Taylor-Young :

$$f(t) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n + o(t^N), \quad t \rightarrow 0,$$

mais qui peut aussi être calculé à partir des développements usuels :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{t} \left(\sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n + o(t^{N+1}) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^{n-1} + o(t^N) = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} t^n + o(t^N) \end{aligned} \quad t \rightarrow 0.$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^n \frac{n!}{n+1}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 77 / 96

Exercice 7 Q 1.b

Exercice 7

Question 1.b

La fonction f est continue sur $]-1, 0]$. Le changement de variable affine $t = -1 + u$ i.e. $u = t + 1 \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow -1$ préserve la nature de l'intégrale. Or

$$0 \leq f(t) = \frac{\ln u}{u-1} \sim -\ln u = o\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right), \quad u \rightarrow 0,$$

d'où l'on déduit la convergence des intégrales $\int_0^1 \ln u \, du$ et donc $\int_{-1}^0 f(t) \, dt$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}}$.

La fonction f est également continue sur $[0, +\infty[$. Mais

$$tf(t) = \ln(1+t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty,$$

d'où l'on déduit que

$$0 \leq \frac{1}{t} = o(f(t)), \quad t \rightarrow +\infty$$

et par suite que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$ diverge par comparaison à l'intégrale divergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 78 / 96

Exercice 7 Q 2.a

Exercice 7

Question 2.a

La fonction f étant continue sur $]-1, +\infty[$, son intégrale converge sur tout segment $[0, x] \subset]-1, +\infty[$ de sorte que g est définie sur $]-1, +\infty[$. Puisque l'intégrale $\int_{-1}^0 f(t) \, dt$ est convergente d'après la question 1.b., on peut étendre le domaine de définition de g à $[-1, +\infty[$.

La continuité de g en -1 résulte alors de la définition de l'intégrale généralisée convergente : par convergence de l'intégrale précédente,

$$g(-1) = - \int_{-1}^0 f(t) \, dt = - \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \int_x^0 f(t) \, dt = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 79 / 96

Exercice 7 Q 2.b

Exercice 7

Question 2.b

Puisque f est continue sur $]-1, +\infty[$, la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 sur $]-1, +\infty[$ de dérivée $g' = f$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 80 / 96

Exercice 7 Q 2.c

Exercice 7

Question 2.c

La fonction

$$k : x \mapsto g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ d'après la question **b.**, de dérivée

$$k' : x \mapsto f(x) - \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\ln x}{x}.$$

Mais, par un calcul élémentaire,

$$\forall x > 0, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x(\ln(1+x) - \ln x) = x^2 f(x) - x \ln x,$$

ce qui conduit à $k'(x) = 0$ pour tout $x > 0$. La fonction k est donc constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, égale à sa valeur en 1 : $k(1) = 2g(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 81 / 96

Exercice 7 Q 2.d

Exercice 7

Question 2.d

D'après la question **c.** et la continuité de g en 0, justifiée à la question **b.**, il vient :

$$g(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - g\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi^2}{6}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 - g(0) + \frac{\pi^2}{6} + o(1) \quad ; \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + o((\ln x)^2) \sim \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 82 / 96

Exercice 7 Q 3.a

Exercice 7

Question 3.a

La fonction $t \mapsto \frac{u(t)v(t)}{1+t^2}$ est tout d'abord continue sur $]0, +\infty[$ par opérations sur les fonctions continues. De plus, l'inégalité arithmético-géométrique donne

$$\forall t > 0, \quad \left| \frac{u(t)v(t)}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{u(t)^2}{1+t^2} + \frac{v(t)^2}{1+t^2} \right)$$

d'où l'on tire la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u(t)v(t)}{1+t^2} dt$ puisque $u, v \in E$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 83 / 96

Exercice 7 Q 3.b

Exercice 7

Question 3.b

La fonction nulle est bien sûr élément de E . Par ailleurs, étant donné $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction

$$t \mapsto \frac{(u(t) + \lambda v(t))^2}{1+t^2} = \frac{u(t)^2}{1+t^2} + 2\lambda \frac{u(t)v(t)}{1+t^2} + \lambda^2 \frac{v(t)^2}{1+t^2}$$

est continue et son intégrale sur $]0, +\infty[$ est convergente comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes d'après la question **a.**. L'ensemble E est donc un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}([0, +\infty[; \mathbb{R})$ est fonctions réelles continues sur $]0, +\infty[$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 84 / 96

Exercice 7 Q 3.c

Exercice 7

Question 3.c

La question **b.** assure que la formule de l'énoncé fait sens. La bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ résulte immédiatement de la linéarité de l'intégrale généralisée convergente et la symétrie est triviale. Pour $u \in E$, on a

$$\langle u, u \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{u(t)^2}{1+t^2} dt \geq 0.$$

Enfin, si $\langle u, u \rangle = 0$, alors la fonction $t \mapsto \frac{u(t)^2}{1+t^2}$ continue, positive et d'intégrale nulle sur $]0, +\infty[$, est identiquement nulle sur cet intervalle, de sorte que $u = 0$. Toutes les conditions sont donc réunies pour faire de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 85 / 96

Exercice 7 Q 4.a

Exercice 7

Question 4.a

La fonction $t \mapsto \frac{h_k(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On établit la convergence absolue de son intégrale sur cet intervalle par comparaison aux intégrales de Riemann en remarquant que :

$$\frac{h_k(t)}{1+t^2} \sim (\ln t)^k = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad t \rightarrow 0$$

et

$$\frac{h_k(t)}{1+t^2} \sim \frac{(\ln t)^k}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right), \quad t \rightarrow +\infty.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 86 / 96

Exercice 7 Q 4.b

Exercice 7

Question 4.b

D'après les questions **2.b.** et **2.d.**, la fonction g est continue sur $]0, +\infty[$ avec :

$$\frac{g(t)^2}{1+t^2} \sim \frac{1}{4} \frac{h_k(t)}{1+t^2} \geq 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

On en déduit la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{g(t)^2}{1+t^2} dt$ d'après la question **a.**. Il suffit alors d'appliquer le résultat de la question **3.a.** aux fonctions g et h_0 de E pour obtenir la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{1+t^2} dt$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 87 / 96

Exercice 7 Q 4.c

Exercice 7

Question 4.c

Pour $k \in \mathbb{N}$, la fonction h_k est continue sur $]0, +\infty[$ et l'intégrale de la fonction

$$t \mapsto \frac{h_k(t)^2}{1+t^2} = \frac{h_{2k}(t)}{1+t^2}$$

sur $]0, +\infty[$ converge d'après la question **a.**, ce qui suffit à assurer que h_k appartient à E .

Si j et k sont deux entiers naturels dont la somme est impaire, alors le changement de variable $x \mapsto t = \frac{1}{x}$, strictement décroissant et de classe \mathcal{C}^1 de $]0, +\infty[$ sur lui-même, donne :

$$\begin{aligned} \langle h_j, h_k \rangle &= \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^{j+k}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln \frac{1}{x})^{j+k}}{1+\frac{1}{x^2}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(-\ln x)^{j+k}}{1+x^2} dx = -\langle h_j, h_k \rangle, \end{aligned}$$

d'où l'on tire $\langle h_j, h_k \rangle = 0$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 88 / 96

Exercice 7 Q 5.a

Exercice 7

Question 5.a

Pour $u \in E$, la fonction $s(u) : t \mapsto u\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$. Le changement de variable $x = \frac{1}{t}$ (dont la validité a déjà été justifiée) préserve la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{(s(u))(t)^2}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u\left(\frac{1}{t}\right)^2}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u(x)^2}{1+\frac{1}{x^2}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{u(x)^2}{1+x^2} dx,$$

qui est donc convergente puisque $u \in E$, si bien que $s(u) \in E$. L'application s est donc à valeurs dans E .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 89 / 96

Exercice 7 Q 5.a

Par ailleurs, pour $u, v \in E$,

$$\forall t > 0, \quad (s(\lambda u + v))(t) = (\lambda u + v)\left(\frac{1}{t}\right) = \lambda u\left(\frac{1}{t}\right) + v\left(\frac{1}{t}\right) = (\lambda s(u))(t) + (s(v))(t)$$

ce qui donne $s(\lambda u + v) = \lambda s(u) + s(v)$ et l'application s est donc linéaire : c'est un endomorphisme de E . Enfin, pour $u \in E$,

$$\forall t > 0, \quad (s \circ s(u))(t) = (s(u))\left(\frac{1}{t}\right) = u(t)$$

d'où l'on déduit que $s \circ s(u) = u$ et donc que $s \circ s = \text{id}_E$. L'endomorphisme s est donc une symétrie de E .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 90 / 96

Exercice 7 Q 5.b

Exercice 7

Question 5.b

Puisque s est une symétrie de E , les sous-espaces vectoriels

$$\text{Ker}(s - \text{id}_E) = \left\{ u \in E : \forall t > 0, u\left(\frac{1}{t}\right) = u(t) \right\} = F$$

et

$$\text{Ker}(s + \text{id}_E) = \left\{ u \in E : \forall t > 0, u\left(\frac{1}{t}\right) = -u(t) \right\} = G$$

sont supplémentaires dans E .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 91 / 96

Exercice 7 Q 5.c

Exercice 7

Question 5.c

Le même changement de variable qu'en 5.a. donne :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \langle s(u), s(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 92 / 96

Exercice 7 Q 5.d

Exercice 7

Question 5.d

Dès lors, pour $u \in F$ et $v \in G$, $\langle u, v \rangle = \langle s(u), -s(v) \rangle = -\langle u, v \rangle$ d'où l'on tire $\langle u, v \rangle = 0$, ce qui prouve que les sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 93 / 96

Exercice 7 Q 6.a

Exercice 7

Question 6.a

On a la relation classique $s = 2p - \text{id}_E$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 94 / 96

Exercice 7 Q 6.b

Exercice 7

Question 6.b

D'après les questions a. et 2.c., le projeté de g est donné par :

$$p(g) = \frac{1}{2}(g + s(g)) : t \mapsto \frac{1}{2}\left(g(t) + g\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{4}(\ln t)^2$$

soit $p(g) = \alpha h_0 + \beta h_2$ avec $\alpha = \frac{\pi^2}{12}$ et $\beta = \frac{1}{4}$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 95 / 96

Exercice 7 Q 7

Exercice 7

Question 7

Puisque $h_0 \in F$ et $g - p(g) \perp F$, on a $\langle h_0, g - \alpha h_0 - \beta h_2 \rangle = 0$ d'où l'on tire :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{1+t^2} dt = \langle h_0, g \rangle = \alpha \langle h_0, h_0 \rangle + \beta \langle h_0, h_2 \rangle = \alpha \frac{\pi}{2} + \beta I = \frac{7\pi^3}{96}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 96 / 96