Fonctions de plusieurs variables : optimisation

Feuille d'exercices

$\boxed{1}$ Étudier les extremums locaux et globaux des fonctions ci-dessous :

✎

1. $f : (x,y) \in \mathcal{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^2 \longmapsto \frac{2+x-y^2}{1-x+y^2}$ (extremums globaux seulement) ;
2. $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$;
3. $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$;
4. $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \frac{x^2}{2} + xyz - z + y$;
5. $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

$\boxed{2}$ On définit la fonction f sur $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-1,+\infty[$ par :

✎

$$\forall (x,y,z) \in \mathcal{U}, \quad f(x,y,z) = x\ln(1+z) + (y-1)^2(z-1) + 2z.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ et qu'elle y admet un unique point critique A que l'on déterminera.
2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ et former sa matrice hessienne au point A.
3. Le point A est-il un extremum local pour la fonction f ?

$\boxed{3}$ On considère les fonctions

$$f : t \in]0,+\infty[\longmapsto \frac{\ln(1+t)}{t}, \quad \mathrm{F} : x \in]0,+\infty[\longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et

$$\mathrm{G} : (x,y) \in]0,+\infty[^2 \longmapsto \mathrm{F}(xy) - \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(y).$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer, pour tout $x > 0$, $\mathrm{F}'(x)$ et $\mathrm{F}''(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f'(x)$.
2. Justifier que G est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$ et exprimer les dérivées partielles premières et secondes de G en tout point (x,y) de $]0,+\infty[^2$ en fonction de x, y, f et f'.
3. Établir que G admet $(1,1)$ comme seul point critique.
4. Est-ce que G admet un extremum local ?

$\boxed{4}$ L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère la fonction

★

$$f : (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (1 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 + 3x_3^2)\mathbf{e}^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}.$$

1. Soit

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une matrice $\mathrm{P} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\mathrm{PP} = \mathrm{I}_3$ et

$${}^t\mathrm{PAP} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. **a.** Déterminer une base orthonormale $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^3$,

$$f(\mathrm{X}) = (1 - 2y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2)\mathbf{e}^{-(y_1^2+y_2^2+y_3^2)}$$

où y_1, y_2, y_3 désignent les coordonnées de X dans la base $\mathscr{B}$.

b. En déduire que pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^3$,

$$(1-2r^2)\mathbf{e}^{-r^2} \leqslant f(\mathrm{X}) \leqslant (1+4r^2)\mathbf{e}^{-r^2}$$

où l'on a noté $r = \|\mathrm{X}\|$. Préciser les cas où l'une des deux inégalités est une égalité.

3. Déduire de ce qui précède que f admet un maximum et un minimum que l'on déterminera et préciser les points où ils sont atteints.

$\boxed{5}$ Pour $n \geqslant 2$ entier donné, on considère l'application

★

$$f : (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto \sum_{k=1}^n x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer ses dérivées partielles premières.
2. Montrer que f admet un unique point critique $\mathrm{A} = (a_1,\ldots,a_n)$ que l'on déterminera.
3. **a.** Déterminer la matrice hessienne de f en A en fonction de la matrice $\mathrm{J}_n \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

b. Déterminer le rang de J_n et calculer $\mathrm{J}_n\mathrm{U}$ où $\mathrm{U} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est le vecteur dont tous les coefficients sont égaux à 1. En déduire les valeurs propres de J_n.

c. Montrer que f admet en A un extremum local dont on précisera la nature et la valeur.

d. Vérifier que l'extremum précédent est global.

$\boxed{6}$ On définit la fonction

✎

$$f : (x,y) \in]0,+\infty[^2 \longmapsto \frac{(x+y)^2}{xy}.$$

1. Justifier que $f(x,y) \geqslant 4$ pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$.
2. En déduire que f admet un minimum global. Le calculer et préciser les points en lequel il est atteint.

$\boxed{7}$ On considère la fonction

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^4 + y^4 - 4xy.$$

1. Montrer que f n'admet pas de maximum global.

2. L'objectif de cette question est de montrer que f admet un minimum global et de le calculer.
  a. Justifier qu'il suffit de travailler sur la restriction de f à $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.
  b. Étudier, pour $y \geqslant 0$ donné, les variations de la fonction $g_y : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x, y)$. Montrer qu'elle admet un minmum global m_y que l'on exprimera en fonction de y.
  c. Étudier les variations de la fonction $y \longmapsto m_y$ sur $[0, +\infty[$.
  d. Conclure.

8 ★ Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2).$$

1. Étudier les extremums locaux de f.

2. Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
  a. Justifier que f admet un maximum M et un minimum m sur $\mathcal{D}$ et qu'ils sont atteints en des points $(x, y) \in \mathcal{D}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$.
  b. Étudier la fonction $t \longmapsto f(\cos t, \sin t)$ et en déduire les valeurs de m et M.

9 ★ On considère la fonction f définie sur $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - 2\ln(y - x).$$

1. Montrer que f admet un unique point critique A que l'on déterminera.

2. En utilisant une formule de Taylor, justifier que f admet en A un minimum global que l'on calculera.

3. La fonction f admet-elle un maximum global ? local ?

10 Soient $r > 0$, $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{B}'(\mathrm{A}, r) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur la boule fermée $\mathcal{B}'(\mathrm{A}, r)$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur la boule ouverte $\mathcal{B}(\mathrm{A}, r)$.
Montrer que si f est constante sur la sphère $\mathcal{S}(\mathrm{A}, r)$, alors le gradient de f s'annule en un point de la boule ouverte $\mathcal{B}(\mathrm{A}, r)$.

11 **1.** Représenter graphiquement l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}$$

et préciser sa nature topologique.

2. Étudier les extremums sur $\mathcal{A}$ de la fonction

$$f : (x, y) \longmapsto y^2 - x^2 y + x^2.$$

12 ★ Soit $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ un nuage de points du plan, non alignés verticalement. En considérant la fonction

$$\mathrm{F} : (m, p) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \sum_{k=1}^{n} (y_k - m x_k - p)^2,$$

démontrer l'existence et l'unicité de la droite de régression de y en x et préciser son équation.

13 Dans chacun des cas suivants, étudier la position du plan tangent au graphe de f au point A indiqué.

1. $f : (x, y) \longmapsto xy(3 - x - y)$, $\mathrm{A}_1 = (1, 1)$, $\mathrm{A}_2 = (1, -1)$;

2. $f : (x, y) \longmapsto x^4 + y^4 + (x - y)^2$, $\mathrm{A} = (1, 0)$.

14 ✎ **1.** Déterminer les extremums de la fonction $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $x + y + z = 3$ en utilisant successivement les méthodes suivantes :
  a. en explicitant la contrainte ;
  b. sans expliciter la contrainte.

2. Déterminer les extremums de la fonction $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x^2 - 2xz + 2yz + \frac{1}{2}z^2$ sous la contrainte $x - 2y + 2z = 9$ sans expliciter celle-ci.

3. La fonction

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-4, +\infty[\longmapsto \begin{array}{l} 2 - x - 8y + 7z - \frac{3}{2}x^2 + \\ \quad + y^2 - 3yz + z^2 + y\ln(4 + z) \end{array}$$

présente-t-elle un extremum au point $\mathrm{A} = (1, 0, -3)$ sous la contrainte $4x - y - z = 7$?

15 ♣ Soient a, b, c des réels strictement positifs.

1. Montrer que

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = abc, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$$

est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto xyz$ admet sur $\mathcal{K}$ un minimum et un maximum globaux que l'on déterminera, ainsi que les points en lesquels ils sont atteints.

16 Soient un entier $n \geqslant 1$ et des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ strictement positifs tels que $\sum_i \alpha_i = 1$. On considère les fonctions

$$f : (x_1, \ldots, x_n) \in [0, +\infty[^n \longmapsto \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \quad \text{et} \quad g : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

On pose également :

$$\Gamma = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [0, +\infty[^n : g(x_1, \ldots, x_n) = 1\}.$$

1. Montrer que f admet un maximum μ sur Γ et que celui-ci est atteint sur $\Gamma \cap]0, +\infty[^n$.

2. Déterminer les points critiques de f sur $]0, +\infty[^n$ sous la contrainte $g(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Montrer que $\mu = f(1, \ldots, 1) = 1$.

3. En déduire que :

$$\forall x_1, \ldots, x_n \geqslant 0, \quad \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

17 Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{D}, \quad f(x, y, z) = x \ln x + y \ln y + z \ln z.$$

1. La fonction f est-elle minorée, majorée, bornée sur $\mathcal{D}$?

2. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

Étant donné un réel $a > 0$, on considère l'ensemble

$$\mathcal{C}_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 3a\}$$

et on note $g = f|_{\mathcal{C}_a}$ la restriction de f à $\mathcal{C}_a$.

3. Montrer que si g admet un extremum local au point (x, y, z), alors :

$$1 + \ln x = 1 + \ln y = 1 + \ln z.$$

4. Étudier l'existence des extremums locaux de g. Comparer la valeur obtenue à celle trouvée à la première question.

5. Retrouver les extremums de g en se ramenant à l'étude des extremums d'une fonction de deux variables bien choisies.

18 ✎ Étudier les extremums des fonctions ci-dessous sous la contrainte indiquée :

1. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 + y^2$ sous la contrainte $xy = 1$;

2. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto 3x + y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 10$;

3. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto y^2 - x^2$ sous la contrainte $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$;

4. $f : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longmapsto y - x^3$ sous la contrainte $x^3 + y^4 = 1$.

19 ★ Soit $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. L'objectif de l'exercice est d'établir le lemme 1.7 (et en particulier l'existence d'une valeur propre de A) par des méthodes analytiques.

1. a. Justifier que la forme quadratique q_{A} canoniquement associée à A est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

b. Déterminer le gradient $\nabla q_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ de q_{A} en tout point $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$.

2. a. Justifier que sur la sphère unité $\mathcal{S} = \{\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n : {}^t\mathrm{X}\mathrm{X} = 1\}$, la fonction q_{A} admet un minimum α et un maximum β.

b. Montrer que :

$$\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \left\|\mathrm{X}\right\|^2 \leqslant q_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) \leqslant \beta \left\|\mathrm{X}\right\|^2.$$

En déduire que les valeurs propres de A appartiennent à l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

c. Montrer qu'un vecteur $\mathrm{X} \neq 0$ réalise l'égalité dans une des deux inégalités ci-dessus si, et seulement si, il est propre pour α ou β.

d. En déduire en particulier que A admet au moins une valeur propre, en particulier que α et β sont respectivement les plus petite et plus grande valeurs propres de A.