

Endomorphismes et matrices symétriques

Feuille d'exercices

Dans les exercices qui suivent, on note $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. symétriques définies positives) de $M_n(\mathbb{R})$.

1 Soient E un espace euclidien et a, b deux vecteurs non nuls de E . Soit φ l'endomorphisme de E défini par $\varphi(x) = x + \langle x, a \rangle b$ pour tout $x \in E$. Montrer que φ est un endomorphisme symétrique si, et seulement si, la famille (a, b) est liée.

2 1. Justifier que

$$(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2 \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Vérifier que $\varphi : P \mapsto 2XP' + (X^2 - 1)P''$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3 On munit \mathbb{R}^3 de sa structure euclidienne canonique. Étant donnée une famille libre (u_1, u_2) de \mathbb{R}^3 , on considère le sous-espace vectoriel $H = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et l'application

$$f : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \langle u_1, x \rangle u_2 + \langle u_2, x \rangle u_1.$$

- Vérifier que f est un endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer le noyau et l'image de f .
- Montrer que H est stable par f . On note g l'endomorphisme de H induit par f .
 - Déterminer la matrice représentative de g en base (u_1, u_2) .
 - Vérifier que

$$(\|u_2\| u_1 - \|u_1\| u_2, \|u_2\| u_1 + \|u_1\| u_2)$$

est une base orthogonale de H et former la matrice de g dans cette base.

d. Justifier que f admet une valeur propre $\lambda_1 < 0$, la valeur propre 0 et une valeur propre $\lambda_2 > 0$.

4 Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E . Montrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .

5 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^t A = {}^t A A$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Montrer que $S = {}^t A A$ est nulle puis que $A = 0$.

6 Pour chacune des matrices A suivante, déterminer une matrice P inversible telle que ${}^t P A P$ soit diagonale :

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que les endomorphismes a et b de \mathbb{R}^4 canoniquement associés.

- Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?
- Calculer A^2 et B^2 . En déduire les valeurs propres de A et B .
- Déterminer les sous-espaces propres de A et B .
- Montrer qu'il existe une base orthonormale de \mathbb{R}^4 dans laquelle les matrices de a et b sont toutes deux diagonales.

8 1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

2. En déduire que si E un espace euclidien rapporté à une base orthonormale $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$, alors pour tout projecteur orthogonal p de E , on a :

$$\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \text{rg } p.$$

9 Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^n euclidien canonique. Justifier l'existence d'une base orthonormale (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n telle que la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ soit orthogonale. *Indication.* Si A désigne la matrice représentative de f en base canonique, on pourra considérer l'endomorphisme g canoniquement associé à la matrice ${}^t A A$.

10 Pour $S \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique, montrer que :

$$\inf_{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{{}^t X S X}{{}^t X X} = \min(\text{Sp } S) \quad \text{et} \quad \sup_{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{{}^t X S X}{{}^t X X} = \max(\text{Sp } S),$$

où $\text{Sp } S$ désigne le spectre de S .

11 Soit f endomorphisme symétrique de trace nulle d'un espace euclidien E .

- Soient $(e_i)_{i=1}^n$ une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f et $x = \sum_i e_i$. Montrer que $\langle f(x), x \rangle = 0$.
- En déduire par récurrence l'existence d'une base orthonormale de E dans laquelle f est représenté par une matrice de coefficients diagonaux tous nuls.

12 1. a. Montrer qu'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique est positive (resp. définie-positive) si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

b. En déduire que si M est une matrice symétrique positive inversible de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, alors la matrice M^{-1} est symétrique positive.

2. Soit M une matrice symétrique positive de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Justifier qu'on peut écrire $M = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i {}^t X_i$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels positifs ou nuls et X_1, \dots, X_n des matrices colonnes formant une base orthonormale de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b. Montrer que la matrice $L = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} X_i {}^t X_i$ est symétrique positive et vérifie la relation $L^2 = M$. On admet que L est la seule matrice symétrique positive de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $L^2 = M$ et on la note \sqrt{M} .

c. Montrer que si M est de plus inversible, alors $\sqrt{M^{-1}} = \sqrt{M}^{-1}$.

13 Soient E un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Un endomorphisme f de E est appelé *contraction* si pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

1. Donner un exemple de contraction.

2. On suppose dans cette question que l'endomorphisme f est symétrique.

a. Montrer que f est une contraction si, et seulement si, pour toute valeur propre λ de f , on a $|\lambda| \leq 1$.

b. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \|P(f)(x)\| \leq \left(\sup_{\lambda \in \text{Sp}(f)} |P(\lambda)| \right) \|x\|$$

où $\text{Sp}(f)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de f .

3. On suppose désormais que f est un endomorphisme inversible de E et on note M sa matrice représentative dans une base \mathcal{e} de E .

a. Montrer que ${}^t M M$ est une matrice symétrique définie-positive. En déduire qu'il existe une matrice S symétrique définie-positive telle que ${}^t M M = S^2$.

b. Montrer qu'il existe une matrice $\Omega \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $M = \Omega S$.

c. Justifier l'unicité du couple (Ω, S) formé d'une matrice Ω orthogonale et d'une matrice S symétrique définie-positive telles que $M = \Omega S$.

Indication. Si (Ω_1, S_1) et (Ω_2, S_2) conviennent, on pourra montrer que S_1 et S_2 ont les mêmes vecteurs propres associés aux mêmes valeurs propres.

d. Montrer que f est une contraction si, et seulement si, pour toute valeur propre λ de S , on a $|\lambda| \leq 1$.

14 Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

★

$$\varphi(P) = \sum_{k=0}^n \left(\int_0^1 P(t) t^k dt \right) X^k.$$

1. **a.** Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Déterminer $\text{Ker } \varphi$.

2. **a.** Écrire la matrice M de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier que M est diagonalisable.

b. Pour $U = {}^t (u_0 \ u_1 \ \dots \ u_n) \in \mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, montrer que

$${}^t U M U = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n u_k t^k \right)^2 dt.$$

3. En déduire que toutes les valeurs propres de φ sont strictement positives.

4. En utilisant la trace, montrer que la plus petite valeur propre de φ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

15 **1.** Soit f endomorphisme symétrique positif d'un espace euclidien E . Montrer qu'un vecteur $x \in E$ appartient au noyau de f si, et seulement si, $\langle x, f(x) \rangle = 0$.

2. Soient $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathbf{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que ${}^t A S A = 0$. Montrer que $\text{Im } A \subset \text{Ker } S$.

16 Soient $S \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie-positive et $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que la forme quadratique canoniquement associée à A est nulle.

2. En déduire que la matrice $S + A$ est inversible.

17 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère la forme bilinéaire φ_a canoniquement associée à la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ a & 3 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $M_a U_i$, $1 \leq i \leq 3$, où

$$U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire deux matrices D_a diagonale et P inversible telles que $M_a = P D_a P^{-1}$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que φ_a soit un produit scalaire. Déterminer alors une base orthonormale pour ce produit scalaire.

18 Les formes quadratiques ci-dessous sont-elles positives ? définies-positives ? Déterminer l'endomorphisme symétrique associé.

1. $q_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 2x^2 - 2y^2 + 3xy$;

2. $q_2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - xz$.

19 **Transformation de Legendre**

★ Pour $n \geq 1$ donné, on travaille dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne canonique, sur lequel on considère une forme quadratique définie-positive f .

1. Pour $p \in \mathbb{R}^n$ donné, on considère l'application

$$F : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle p, x \rangle - f(x).$$

- a. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^n , et des réels $q_1, \dots, q_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées y_1, \dots, y_n en base \underline{e} , on ait :

$$F(x) = \sum_{i=1}^n (q_i y_i - \lambda_i y_i^2).$$

- b. Montrer que la fonction F est majorée sur \mathbb{R}^n et atteint sa borne supérieure.

On définit alors l'application $L(f) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, appelée *transformée de Legendre* de f , par :

$$L(f) : p \mapsto \max_{x \in \mathbb{R}^n} (\langle p, x \rangle - f(x)).$$

2. a. Montrer que $L(f)$ est une forme quadratique sur \mathbb{R}^n et déterminer la matrice symétrique associée.
b. Que vaut $L(L(f))$?