Travaux dirigés

Convergences et approximations en probabilités

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2018/2019

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Elle a donc pour densité
$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2},$$
pour espérance $\mathbb{E}(X) = 0$ et pour variance $\mathbb{V}(X) = 1$.
Pour $x > 0$, on a donc par parité de f :
$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathbb{P}(-x \leqslant X \leqslant x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathbb{P}(|X| \leqslant x).$$

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{x^2},$$
ce qui donne ici :
$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(1 - \mathbb{P}(|X| > x)\big) \geqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big).$$

Exercice 2

Question 1

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse, $|X^r| \leqslant M^r$ où la variable M^r, constante donc discrète finie, admet une espérance. On en déduit par domination que X^r admet une espérance, i.e. que X admet un moment d'ordre r.

Exercice 2

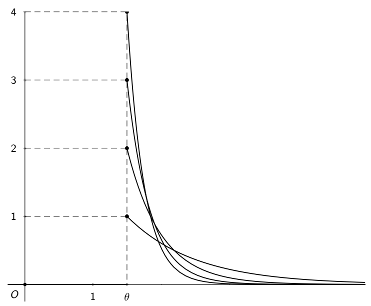
Question 2

L'inégalité de droite est l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire positive $|X|$:
$$\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$
Pour l'inégalité de gauche, on observe (en envisageant les deux cas de figure $|X| < a$ et $|X| \geqslant a$) que :
$$X^2 \leqslant a^2 + M^2 \mathbb{1}_{[|X| \geqslant a]},$$
d'où l'on déduit par croissance de l'espérance que
$$\mathbb{E}(X^2) \leqslant a^2 + M^2\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_{[|X| \geqslant a]}) = a^2 + M^2\,\mathbb{P}(|X| \geqslant a),$$
ce qui constitue le résultat à démontrer :
$$\frac{\mathbb{E}(X^2) - a^2}{M^2} \leqslant \mathbb{P}(|X| \geqslant a).$$

Exercice 3

Soit F la fonction de répartition commune aux variables X_n, donnée par :
$$F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \theta \\ 1 - \mathrm{e}^{-(x-\theta)} & \text{si } x \geqslant \theta \end{cases}.$$
On commence par déterminer, à $n \geqslant 1$ fixé, la loi de la variable aléatoire Y_n. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a par indépendance mutuelle des variables $X_1, \ldots, X_n$:
$$\mathbb{P}(Y_n \leqslant x) = 1 - \mathbb{P}\big(\min(X_1, \ldots, X_n) > x\big) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, \ldots, X_n > x)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x) \cdots \mathbb{P}(X_n > x) = 1 - \big(1 - F(x)\big)^n$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < \theta \\ 1 - \mathrm{e}^{-n(x-\theta)} & \text{si } x \geqslant \theta \end{cases}.$$
La fonction de répartition F_n obtenue ci-dessus pour Y_n étant continue sur $\mathbb{R}$ (même en θ) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\theta\}$, la variable Y_n est à densité donnée par
$$f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < \theta \\ n\mathrm{e}^{-n(x-\theta)} & \text{si } x \geqslant \theta \end{cases}.$$

Pour conjecturer le comportement asymptotique de la suite (Y_n), on peut représenter graphiquement les fonctions f_n :



La convergence en probabilités de (Y_n) vers la variable certaine θ peut être établie par un calcul direct : puisque $Y_n \geqslant \theta$ presque sûrement, on a pour $\varepsilon > 0$ donné,
$$\mathbb{P}(|Y_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(Y_n \geqslant \theta + \varepsilon) = 1 - F_n(\theta + \varepsilon) = \mathrm{e}^{-n\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
Ainsi
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0$$
pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui signifie que (Y_n) converge en probabilité vers la variable certaine θ.

Il est intéressant d'observer sur ce premier exemple simple que les inégalités du cours permettent de retrouver ce résultat. On commence, pour $n \geqslant 1$ donné, par justifier l'existence et calculer la valeur de

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\theta}^{+\infty} nt\mathrm{e}^{-n(t-\theta)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n} + \theta.$$

On peut alors appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $Y_n - \theta$, presque sûrement positive :

$$\mathbb{P}(|Y_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(Y_n - \theta \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y_n - \theta)}{\varepsilon} = \frac{1}{n\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Par encadrement, on en déduit donc que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0,$$

ce qui signifie que (Y_n) converge en probabilité vers la variable certaine θ.

Exercice 4

Question 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $Y_n = X_n X_{n+1}$ ne prend que les valeurs 0 et 1 donc suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1, X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = p^2$$

par indépendance de X_n et X_{n+1}. Elle admet donc espérance et variance données par :

$$\mathbb{E}(Y_n) = p^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y_n) = p^2(1-p^2).$$

Exercice 4

Question 2

- Si $|n-m| \geqslant 2$ alors $\{n, n+1\} \cap \{m, m+1\} = \emptyset$ et $(X_n, X_{n+1}, X_m, X_{m+1})$ est donc une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Comme Y_n est fonction de (X_n, X_{n+1}) (i.e. $\mathcal{A}_{Y_n} \subset \mathcal{A}_{(X_n, X_{n+1})}$) et Y_m de (X_m, X_{m+1}) (de même), le théorème des coalitions assure que (les tribus $\mathcal{A}_{(X_n,X_{n+1})}$ et $\mathcal{A}_{(X_m,X_{m+1})}$ sont indépendantes donc que) Y_n et Y_m sont indépendantes.
- En revanche si $|n-m| \leqslant 1$ les variables Y_n et Y_m sont dépendantes. En effet, c'est évident si $n = m$ et si (par exemple) $m = n+1$, alors

$$\operatorname{cov}(Y_n, Y_{n+1}) = \mathbb{E}(Y_n Y_{n+1}) - \mathbb{E}(Y_n)\,\mathbb{E}(Y_{n+1}) = p^3 - p^4 = p^3(1-p) \neq 0$$

car la variable $Y_n Y_{n+1} = X_n X_{n+1}^2 X_{n+2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n Y_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_n = 1, X_{n+1} = 1, X_{n+2} = 1)\\ &= \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)\,\mathbb{P}(X_{n+2} = 1) = p^3.\end{aligned}$$

Exercice 4

Question 3

La linéarité de l'espérance donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(Y_k) = p^2$$

et il s'agit donc de justifier la convergence en probabilité de la suite (Z_n) vers l'espérance commune des variables aléatoires Z_n. Dans l'optique de conclure par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on calcule

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Z_n) &= \mathbb{V}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\Big) = \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(Y_k) + 2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\operatorname{cov}(Y_k, Y_l)\Big)\\ &= \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(Y_k) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{cov}(Y_k, Y_{k+1})\Big)\\ &= \frac{1}{n^2}\Big(np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p)\Big) = \frac{p^2(1-p)}{n^2}\big((1+3p)n - 2p\big).\end{aligned}$$

On observe que $\mathbb{V}(Z_n)$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Puisque Z_n admet une variance, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique à la variable Z_n d'espérance p^2 :

$$0 \leqslant \mathbb{P}(|Z_n - p^2| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Z_n)}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On en déduit par encadrement que

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|Z_n - p^2| \geqslant \varepsilon) = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui signifie que la suite (Z_n) converge en probabilité vers la variable constante égale à p^2.

Exercice 5

Question 1

En appliquant l'inégalité de Markov à la variable positive $(X_n - m)^2$ (qui admet une espérance comme X_n^2 et X_n), il vient, pour $\varepsilon > 0$ donné :

$$\mathbb{P}(|X_n - m| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}\big((X_n - m)^2 \geqslant \varepsilon^2\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}\big((X_n - m)^2\big)}{\varepsilon^2}.$$

Or :

$$(X_n - m)^2 = \big(X_n - \mathbb{E}(X_n)\big)^2 + 2\big(X_n - \mathbb{E}(X_n)\big)\big(\mathbb{E}(X_n) - m\big) + \big(\mathbb{E}(X_n) - m\big)^2$$

où la variable $X_n - \mathbb{E}(X_n)$ est centrée, d'où :

$$\mathbb{E}\big((X_n - m)^2\big) = \mathbb{V}(X_n) + \big(\mathbb{E}(X_n) - m\big)^2.$$

Finalement,

$$\mathbb{P}\big(|X_n - m| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X_n) + \big(\mathbb{E}(X_n) - m\big)^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Il en résulte par encadrement que :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\big(|X_n - m| \geqslant \varepsilon\big) = 0,$$

ce qui établit la convergence en probabilité de (X_n) vers m.

Exercice 5

Question 2

La variable X_n donne le nombre de succès (apparition de pile) dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. Elle suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
D'après le théorème de transfert appliqué à la variable finie X_n, on a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n) &= \mathbb{E}(\mathrm{e}^{X_n/n}) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{k/n}\,\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p\mathrm{e}^{1/n})^k(1-p)^{n-k}\\ &= (p\mathrm{e}^{1/n} + 1 - p)^n = \big(1 + p(\mathrm{e}^{1/n} - 1)\big)^n\end{aligned}$$

où

$$n\ln\big(1 + p(\mathrm{e}^{1/n} - 1)\big) \sim np(\mathrm{e}^{1/n} - 1) \sim p \to p, \quad n \to \infty,$$

si bien que :

$$\mathbb{E}(Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^p.$$

De même,

$$\mathbb{E}(Y_n^2) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k/n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \left(1+p(\mathrm{e}^{2/n}-1)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{2p}$$

d'où

$$\mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - \mathbb{E}(Y_n)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Le résultat obtenu en **1.** s'applique donc à la suite (Y_n) : celle-ci converge en probabilité vers e^p.

Remarque. On peut conclure plus directement en remarquant que, d'après la loi des grands nombres appliquée à la suite de variables aléatoires

$$Z_n = \begin{cases} 1 & \text{si le } n\text{-ième lancer renvoie pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ admettant espérance et variance, la suite de terme général $\overline{Z}_n = \frac{1}{n}X_n$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(Z_1) = p$.
Dans ces conditions, la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\mathrm{e}^{X_n/n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers e^p puisque la fonction exponentielle est continue.

Exercice 6

Question 1

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. La variable aléatoire T_i ne prend que les valeurs 0 et 1, elle suit une loi de Bernoulli dont il s'agit de déterminer le paramètre $\mathbb{P}(T_i = 1)$.
Les placements des différentes boules dans les urnes étant indépendants, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_N$ donnant le numéro de l'urne dans laquelle on place chacune des boules sont mutuellement indépendantes.
Par suite,

$$\mathbb{P}(T_i = 1) = \mathbb{P}(X_1 \neq i, \ldots, X_N \neq i) = \mathbb{P}(X_1 \neq i)\cdots\mathbb{P}(X_N \neq i).$$

Le placement d'une boule donnée étant uniforme entre toutes les urnes, on a par ailleurs $\mathbb{P}(X_j \neq i) = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, d'où :

$$\mathbb{P}(T_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N,$$

qui constitue le paramètre de la loi de Bernoulli suivie par T_i. Celle-ci admet donc pour espérance

$$\mathbb{E}(T_i) = \mathbb{P}(T_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N.$$

Remarque. Cette espérance est commune à toutes les variables T_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Exercice 6

Question 2

Pour $i = j$, on a

$$\mathrm{cov}(T_i, T_j) = \mathbb{V}(T_i) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^N\left[1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^N\right].$$

Pour $i \neq j$, T_iT_j est une variable de Bernoulli qui admet donc pour espérance, par un argument similaire à celui employé en **1.** :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_iT_j) &= \mathbb{P}(T_iT_j = 1) = \mathbb{P}(T_i = 1, T_j = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_1, \ldots, X_N \notin \{i,j\}) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^N = \left(1-\frac{2}{n}\right)^N.\end{aligned}$$

Par suite, d'après la formule de Huygens,

$$\mathrm{cov}(T_i, T_j) = \mathbb{E}(T_iT_j) - \mathbb{E}(T_i)\mathbb{E}(T_j) = \left(1-\frac{2}{n}\right)^N - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2N}.$$

Remarque. Cette covariance est commune à tous les couples (T_i, T_j), $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

Exercice 6

Question 3

On a $Y_n = T_1 + \cdots + T_n$ donc, par linéarité de l'espérance et vu la question **1.**, on a :

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(T_i) = \mathbb{E}(T_1) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^N = \exp\left(an\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$$

où

$$an\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim an \times \frac{-1}{n} = -a \to -a, \quad n \to \infty.$$

Par suite,

$$\mathbb{E}(S_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-a}.$$

Exercice 6

Question 4

Il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S_n) &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(T_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{cov}(T_i, T_j)\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(n\,\mathbb{V}(T_1) + 2\binom{n}{2}\mathrm{cov}(T_1, T_2)\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\right) - \frac{n-1}{n}\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^{an} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2an}\right)\end{aligned}$$

où, par des arguments similaires à celui employé en **3.**,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an} = \mathrm{e}^{-a}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{an} = \mathrm{e}^{-2a} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2an} = \mathrm{e}^{-2a}.$$

Par opérations sur les limites finies, on en déduit que :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{V}(S_n) = 0.$$

Exercice 6

Question 5.a

C'est une application directe de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|S_n - \mathrm{e}^{-a}\right| &= \left|(S_n - \mathbb{E}(S_n)) + (\mathbb{E}(S_n) - \mathrm{e}^{-a})\right| \\ &\leqslant |S_n - \mathbb{E}(S_n)| + \left|\mathbb{E}(S_n) - \mathrm{e}^{-a}\right|.\end{aligned}$$

Exercice 6

Question 5.b

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Compte-tenu de ce que $\mathbb{E}(S_n)$ converge vers e^{-a} lorsque $n \to \infty$ d'après **3.**, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \left|\mathbb{E}(S_n) - \mathrm{e}^{-a}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors pour $n \geqslant n_0$, d'après **a.**,

$$\left|S_n - \mathrm{e}^{-a}\right| \leqslant |S_n - \mathbb{E}(S_n)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où :

$$|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \implies \left|S_n - \mathrm{e}^{-a}\right| \leqslant \varepsilon$$

c'est-à-dire, par contraposée :

$$\left|S_n - \mathrm{e}^{-a}\right| \geqslant \varepsilon \implies |S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

ou encore en termes d'événements :

$$\left[\left|S_n - \mathrm{e}^{-a}\right| \geqslant \varepsilon\right] \subset \left[|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

On a donc, pour $n \geqslant n_0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|S_n - \mathbf{e}^{-a}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\Big(\left|S_n - \mathbb{E}(S_n)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Exercice 6

Question 5.c

Pour $\varepsilon > 0$ donné, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire S_n donne :

$$\mathbb{P}\Big(\left|S_n - \mathbb{E}(S_n)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big) \leqslant \frac{4}{\varepsilon^2}\,\mathbb{V}(S_n)$$

d'où, d'après **4.** et **b.**,

$$\mathbb{P}\left(\left|S_n - \mathbf{e}^{-a}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{4}{\varepsilon^2}\,\mathbb{V}(S_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Il en résulte par encadrement que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|S_n - \mathbf{e}^{-a}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Exercice 6

Question 5.d

On vient de démontrer que (S_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\mathbf{e}^{-a}$.

Exercice 7

Question 1

Pour $\varepsilon > 0$ donné et $n \in \mathbb{N}$,

$$|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \leqslant |X_n - X| + |Y_n - Y|$$

d'où :

$$\big[|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geqslant \varepsilon\big] \subset \Big[|X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big] \cup \Big[|Y_n - Y| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big].$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geqslant \varepsilon\big) &\leqslant \mathbb{P}\Big(\Big[|X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big] \cup \Big[|Y_n - Y| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big]\Big)\\ &\leqslant \mathbb{P}\Big(|X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big) + \Big(|Y_n - Y| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

d'où, par encadrement,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geqslant \varepsilon\big) = 0,$$

ce qui établit la convergence en probabilité de $(X_n + Y_n)$ vers $X + Y$.

Exercice 7

Question 2

Si (X_n) converge en probabilité vers X et Y, on vérifie aisément que $(-X_n)$ converge en probabilité vers $-Y$ ce qui implique, d'après **1.**, la convergence en probabilité de la suite de terme général $X_n - X_n = 0$ vers $X - Y$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - Y| \geqslant \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X - Y| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Puisque

$$[X \neq Y] = [|X - Y| > 0] = \bigcup_{n\geqslant 1} \Big[|X - Y| \geqslant \frac{1}{n}\Big]$$

où l'union est croissante, le théorème de la limite monotone donne :

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(|X - Y| \geqslant \frac{1}{n}\Big) = 0$$

d'où $X = Y$ presque sûrement.

Exercice 8

Question 1

On suppose que (X_n) converge en moyenne vers X. Soit $\varepsilon > 0$ donné.
Par application de l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $|X_n - X|$ positive qui, pour n assez grand, admet une espérance par hypothèse, on obtient :

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X_n - X|)}{\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On en déduit par encadrement que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$$

et, ce résultat étant acquis pour tout $\varepsilon > 0$, la suite (X_n) converge donc en probabilité vers X.

Exercice 8

Question 2.a

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n \neq 0) &= \mathbb{P}(Y_1 \cdots Y_n \neq 0) = \mathbb{P}(Y_1 \neq 0, \ldots, Y_n \neq 0)\\ &= \mathbb{P}(Y_1 \neq 0) \cdots \mathbb{P}(Y_n \neq 0) = (1 - \mathbf{e}^{-\lambda})^n\end{aligned}$$

par indépendance mutuelle des variables $Y_1, \ldots, Y_n$.

Exercice 8

Question 2.b

Pour $\varepsilon > 0$ donné, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(X_n \neq 0)$$

d'où, d'après **a.** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \leqslant (1 - \mathbf{e}^{-\lambda})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Il en résulte par encadrement que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$$

et la convergence en probabilité de (X_n) vers X est donc établie.

Exercice 8
Question 2.c

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toujours par indépendance mutuelle des variables $Y_1, \dots, Y_n$, il vient :

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\Big(\prod_{k=1}^{n} Y_k\Big) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) = \lambda^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

compte-tenu de $\lambda > 1$.
Si la suite (X_n) convergeait en moyenne vers une variable L, alors compte-tenu de

$$X_n \leqslant L + |X_n - L|\,,$$

on aurait par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X_n) \leqslant \mathbb{E}(L) + \mathbb{E}(|X_n - L|) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(L)$$

et la suite de terme général $\mathbb{E}(X_n)$, $n \geqslant 1$, serait majorée, ce qui n'est pas le cas d'après le calcul effectué plus haut.
Ainsi la suite (X_n) ne converge pas en moyenne.

Exercice 9
Question 1

En notant H la variable aléatoire égale à la note obtenue à une question par un candidat qui répondrait au hasard, on a :

$$0 = \mathbb{E}(H) = 1 \cdot \frac{1}{4} + b \cdot \frac{3}{4},$$

d'où l'on déduit la valeur de $b = -\frac{1}{3}$.

On considère à présent un candidat au comportement décrit dans l'énoncé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale à la note obtenue par le candidat à la n-ième question. Il s'agit d'une variable aléatoire finie d'espérance

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1+b}{2} = \frac{1}{3}$$

et de variance

$$\mathbb{V}(X_n) = \frac{(1-b)^2}{4} = \frac{4}{9} = \sigma^2.$$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\big(Y_n \in [p-\varepsilon, p+\varepsilon]\big) = \mathbb{P}\big(|Y_n - p| \leqslant \varepsilon\big) = 1 - \mathbb{P}\big(|Y_n - p| > \varepsilon\big)$$

si bien que la condition de l'énoncé s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \alpha \in]0,1[, \quad \exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geqslant N, \quad \mathbb{P}\big(|Y_n - p| > \varepsilon\big) \leqslant \alpha$$

c'est-à-dire, d'après la définition quantifiée de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(|Y_n - p| > \varepsilon\big) = 0$$

et signifie[1] que (Y_n) converge en probabilité vers p.

Les variables aléatoires X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, étant indépendantes et admettant une espérance et une variance communes, la loi des grands nombres s'applique et garantit que le réel $p = \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{3}$ convient puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. L'inégalité stricte plutôt que large n'est pas un obstacle d'après la chaîne d'inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\big(|Y_n - p| \geqslant 2\varepsilon\big) \geqslant \mathbb{P}\big(|Y_n - p| > \varepsilon\big) \geqslant \mathbb{P}\big(|Y_n - p| \geqslant \varepsilon\big).$$

Exercice 9
Question 2

Plus précisément, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire Y_n fournit (cf. énoncé de la loi des grands nombres), pour $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\big(|Y_n - p| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Puisque $[Y_n \geqslant s] = [Y_n - p \geqslant s - p] \supset [|Y_n - p| < p - s]$, on a par ailleurs :

$$\mathbb{P}(Y_n \geqslant s) \geqslant \mathbb{P}\big(|Y_n - p| < p - s\big) = 1 - \mathbb{P}\big(|Y_n - p| \geqslant p - s\big).$$

Il en ressort que :

$$\mathbb{P}(Y_n \geqslant s) \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{n(p-s)^2}.$$

Pour avoir $\mathbb{P}(Y_n \geqslant s) \geqslant 1 - \alpha$, il suffit donc d'avoir

$$\frac{\sigma^2}{n(p-s)^2} \leqslant \alpha,$$

c'est-à-dire

$$n \geqslant \frac{\sigma^2}{\alpha(p-s)^2}.$$

Pour $\alpha = 0{,}01$ et $s = 0$ puis $s = \frac{p}{2} = \frac{1}{6}$, on obtient respectivement $N = 400$ puis $N = 1600$.

Tout cela n'est guère engageant...

Exercice 9
Question 3

On obtient un bien meilleur résultat en travaillant sur la loi de la variable aléatoire Y_n. Les variables $X_1, \dots, X_n$ étant indépendantes de même loi, admettant un moment d'ordre 2, le théorème limite central s'applique et donne la convergence en loi de la suite de terme général

$$Y_n^* = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(Y_n - p), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
Pour n assez grand, on peut donc s'attendre à ce que :

$$\mathbb{P}(Y_n \geqslant s) = \mathbb{P}\Big(Y_n^* \geqslant \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(s-p)\Big) \simeq 1 - \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(s-p)\Big), \qquad (\star)$$

en désignant par Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

La fonction Φ étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$. Il existe donc un unique réel z_α tel que $\Phi(z_\alpha) = \alpha$.
On choisit alors n tel que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(s-p) \leqslant z_\alpha \quad \text{i.e.} \quad n \geqslant z_\alpha^2 \frac{\sigma^2}{(p-s)^2}$$

pour avoir

$$\mathbb{P}(Y_n \geqslant s) \simeq 1 - \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(s-p)\Big) \geqslant 1 - \alpha.$$

Pour $\alpha = 0{,}01$ et $s = 0$ puis $s = \frac{p}{2}$, on obtient $z_{1-\alpha} \simeq 2{,}326$, $N = 22$ puis $N = 87$.
Cependant, $n = 22$ est peut-être trop petit pour que l'approximation $(\star)$ soit valable, et il faudrait pouvoir estimer l'erreur d'approximation $(\star)$ dans le cas $n = 87$ pour énoncer une conclusion précise... Une vérification informatique est concluante dans les deux cas.

Exercice 10
Question 1

On remarque pour commencer que l'intégrale $I = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie puisque la fonction g est par hypothèse continue sur le segment $[0,1]$.

Les variables aléatoires $X_n = g(U_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes et admettent pour espérance commune

$$\mathbb{E}(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_{U_n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = I$$

d'après le théorème de transfert, puisque l'intégrale ci-dessous converge absolument. Elles admettent de même un moment d'ordre 2

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \int_0^1 g(t)^2\,\mathrm{d}t$$

et donc une variance commune :

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 = \int_0^1 g(t)^2\,\mathrm{d}t - \Big(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\Big)^2.$$

La loi des grands nombres s'applique donc à la suite (X_n) : la suite de terme général

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(U_k) = S_n$$

converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X_1) = I$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(|S_n - I| \geqslant \varepsilon\big) = 0.$$

Exercice 10

Question 2.a

D'après la question **1.**, le code ci-dessous :

```
function y=g(t)
  y=sqrt(1-t.^2);
endfunction
function S=approxI(n)
  U=rand(1,n);
  S=sum(g(U))/n;
endfunction
```

définit une fonction Scilab `approxI` qui renvoie avec une forte probabilité, pour n assez grand, une valeur proche de $I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10

Question 2.b

Le changement de variable $t = \cos x$ permet de calculer

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

On constate que les valeurs renvoyées par Scilab à l'appel `approxI(1000)` sont proches de $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}(Y_n \leqslant x) = \mathbb{P}(X_n \leqslant nx) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^*:\\ k\leqslant nx}} \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{1\leqslant k\leqslant \lfloor nx\rfloor} p_n(1-p_n)^{k-1}$$

en convenant que la somme est nulle si $\lfloor nx\rfloor < 1$. On a donc pour $x > 0$ (même si $\lfloor nx\rfloor = 0$) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n \leqslant x) &= p_n\frac{1-(1-p_n)^{\lfloor nx\rfloor}}{1-(1-p_n)} = 1-(1-p_n)^{\lfloor nx\rfloor}\\ &= 1-\exp\big(\lfloor nx\rfloor \ln(1-p_n)\big).\end{aligned}$$

Pour $x > 0$ fixé, on a par ailleurs

$$1 - \frac{1}{nx} \leqslant \frac{\lfloor nx\rfloor}{nx} \leqslant 1$$

donc, par encadrement, $\lfloor nx\rfloor \sim nx$ lorsque $n\to\infty$, et

$$\lfloor nx\rfloor \ln(1-p_n) \sim -nxp_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\theta x.$$

Ainsi, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0\\ 1-\mathrm{e}^{-\theta x} & \text{si } x > 0\end{cases} = F_Y(x)$$

ce qui signifie que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable Y de loi exponentielle de paramètre θ.

Exercice 12

Pour $n \geqslant 2$, la variable X_n admet pour fonction de répartition

$$F_{X_n} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n}\\ 1-\frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x < n\\ 1 & \text{si } x \geqslant n\end{cases}.$$

La variable certaine $X = 0$, quant à elle, admet pour fonction de répartition

$$F_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\\ 1 & \text{si } x \geqslant 0\end{cases}.$$

Pour $x < 0$, on a

$$F_{X_n}(x) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = F_X(x).$$

Pour $x > 0$ et $n > \max(x, 1/x)$,

$$F_{X_n}(x) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = F_X(x).$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

et comme 0 est un point de discontinuité de F_X, cela suffit pour conclure que (X_n) converge en loi vers X.
Et ce, bien que

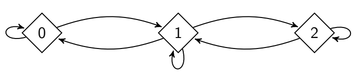
$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\Big(X_n = \frac{1}{n}\Big) + n\,\mathbb{P}(X_n = n) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

ne converge pas vers $\mathbb{E}(X) = 0$ lorsque $n\to\infty$.

Exercice 13

Question 1

On note tout d'abord que X_n est à valeurs dans $\{0,1,2\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \geqslant 2$, les probabilités de transition $p_{i,j}$, $0 \leqslant i,j \leqslant 2$, sont données[2] dans le diagramme ci-dessous :



Pour le justifier on introduit, étant donné $n \in \mathbb{N}$, les événements

- A_1 : « un jeton marqué 1 est tiré de l'urne A (pour le n-ième échange) » ;
- B_1 : « un jeton marqué 1 est tiré de l'urne B (pour le n-ième échange) ».

2. Elles sont en particulier bien définies car il va ressortir de l'analyse à venir que $X_n(\Omega) = \{0,1,2\}$ pour tout $n \geqslant 2$, ce que l'on pourrait établir par récurrence.

Par symétrie du rôle des urnes, on a tout d'abord $p_{2-i,2-j} = p_{i,j}$ pour tous $i, j \in \{0, 1, 2\}$.

- Si $X_n = 0$ alors le jeton tiré dans A est marqué 0 et celui tiré dans B est marqué 1 si bien que $X_{n+1} = 1$. On a donc $p_{0,0} = p_{2,0} = 0$ et $p_{1,0} = 1$.
- Si $X_n = 1$ est réalisé, chacune des urnes contient un jeton 0 et un jeton 1 avant le n-ième échange de sorte que
  - l'événement $[X_{n+1} = 0]$ se réalise si, et seulement si, on tire un jeton marqué 1 dans l'urne A et un jeton marqué 0 dans l'urne B :
  $$p_{0,1} = \mathbb{P}_{[X_n=1]}(A_1 \cap \overline{B_1}) = \mathbb{P}_{[X_n=1]}(A_1)\,\mathbb{P}_{[X_n=1]}(\overline{B_1}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$
  par indépendance des tirages conditionnellement à $[X_n = 1]$ (donc connaissant la composition des urnes) ;
  - sur le même principe,
  $$\begin{aligned} p_{1,1} &= \mathbb{P}_{[X_n=1]}\big((A_1 \cap B_1) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_1})\big) \\ &= \mathbb{P}_{[X_n=1]}(A_1 \cap B_1) + \mathbb{P}_{[X_n=1]}(\overline{A_1} \cap \overline{B_1}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$
  par incompatibilité puis indépendance.

Exercice 13

Question 2

D'après l'étude menée à la question **1.**, (X_n) est une chaîne de Markov.

Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, la formule des probabilités totales appliquée au SCE associé à X_n donne[3], pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$:
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^{2} \mathbb{P}_{[X_n=j]}(X_{n+1} = i)\,\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{j=0}^{2} p_{i,j}\,\mathbb{P}(X_n = j)$$
et l'on constate que la loi de X_{n+1} est déterminée à partir de celle de X_n et des probabilités de transition $p_{i,j}$.

Puisque les variables X_n prennent leurs valeurs dans $\{0, 1, 2\} \subset \mathbb{Z}$, l'étude de la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se rapporte à celle de la convergence des suites de termes généraux $a_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $b_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ et $c_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$, $n \in \mathbb{N}$. On peut envisager pour cela deux méthodes.

3. La première égalité ne vaut que pour $n \geqslant 2$, mais les deux membres extrémaux sont encore égaux pour $n = 0$ et $n = 1$.

Première méthode

Les suites (a_n), (b_n) et (c_n) vérifient donc les relations de récurrence simultanées suivantes :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4} b_n \\ b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n \end{cases}.$$
On en déduit une relation de récurrence sur deux rangs pour la suite (b_n) :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{2} b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2} b_{n+1} + \frac{1}{2} b_n.$$
La résolution de l'équation récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants ci-dessus conduit à l'existence de deux réels λ, μ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \lambda + \mu\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n.$$
On détermine les réels λ et μ grâce aux conditions initiales :
$$\begin{cases} \lambda + \mu = b_0 = 0 \\ \lambda - \frac{1}{2}\mu = b_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{2}{3} \\ \mu = -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

On obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{2}{3}\Big(1 - \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\Big)$$
et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = c_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n.$$
On observe à présent que :
$$\mathbb{P}(X_n = 0) = a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{6} = \mathbb{P}(Y = 0),$$
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3} = \mathbb{P}(Y = 1),$$
$$\mathbb{P}(X_n = 2) = c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{6} = \mathbb{P}(Y = 2).$$
D'après la caractérisation de la convergence en loi pour des suites de variables discrètes à valeurs entières, on en déduit que (X_n) converge en loi vers Y.

Remarque. En utilisant la relation $a_n + b_n + c_n = 1$, on peut établir la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = 1 - \frac{1}{2} b_n$$
et étudier (b_n) comme une suite arithmético-géométrique.

Deuxième méthode

Une méthode plus systématique pour l'étude des chaînes de Markov consiste à introduire le vecteur (stochastique, i.e. à coefficients positifs de somme 1) $U_n = {}^t\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ donnant la loi de X_n. En notant
$$Q = (p_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant 2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$
la matrice de transition (stochastique par colonnes), les relations précédentes s'écrivent matriciellement :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = QU_n.$$
Dans ces conditions, $U_n = Q^n U_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $U_0 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le calcul de Q^n peut se faire classiquement par l'intermédiaire d'un polynôme annulateur de Q (par exemple $X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$) ou en diagonalisant Q, mais il n'est pas nécessaire d'aller aussi loin.

On détermine les valeurs propres de Q : pour $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(Q - \lambda I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\lambda \end{pmatrix} &\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{2} - \lambda^2 & \lambda \\ 1 & \frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\lambda \end{pmatrix} \\ &\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} - \lambda^2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\lambda \end{pmatrix} \\ &\underset{\substack{L_2 \to L_1 \to L_3 \to L_2 \\ C_2 \leftrightarrow C_3}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} - \lambda \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} - \lambda^2 b \end{pmatrix} \end{aligned}$$
Les valeurs propres de Q sont les réels pour lesquels $\operatorname{rg}(Q - \lambda I_3) < 3$, i.e. $-\frac{1}{2}$, 0 et 1.

La matrice Q est donc diagonalisable car elle admet 3 valeurs propres distinctes : il existe $P \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ inversible (qu'il n'est pas nécessaire de déterminer) telle que $Q = PDP^{-1}$ où $D = \operatorname{diag}(1, 0, -\frac{1}{2})$. Dans ces conditions,
$$Q^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$
converge lorsque $n \to \infty$ car $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ et il en va donc de même de $U_n = Q^n U_0$. En passant à la limite dans les relations
$$U_{n+1} = QU_n, \quad a_n + b_n + c_n = 1, \quad a_n \geqslant 0, \quad b_n \geqslant 0, \quad c_n \geqslant 0,$$
on en déduit que $\Pi = \lim_{n\to\infty} U_n$ est un vecteur stochastique tel que $Q\Pi = \Pi$. La résolution du système $QX = X$ conduit au vecteur Π :
$$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$
et l'on retrouve la conclusion obtenue par la première méthode.

Exercice 14

Soit F la fonction de répartition de X.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, la variable X_n prend ses valeurs dans l'ensemble $\{k/n\}_{k\in\mathbb{N}}$. Elle est donc discrète et sa loi est donnée par :
$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\Big(X_n = \frac{k}{n}\Big) &= \mathbb{P}(\lfloor nX \rfloor = k) = \mathbb{P}(k \leqslant nX < k+1) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{k}{n} \leqslant X < \frac{k+1}{n}\Big) = F\Big(\frac{k+1}{n}\Big) - F\Big(\frac{k}{n}\Big). \end{aligned}$$

Pour $x < 0$ tout d'abord, on a :

$$F_{X_n}(x) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = F_X(x)$$

car X_n et X sont à valeurs positives.

Pour $x \geqslant 0$ ensuite, en notant $k_n = \lfloor nx \rfloor$ pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{k_n}{n} \leqslant x < \frac{k_n+1}{n} \qquad (\star)$$

si bien que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n \leqslant x) &= \sum_{j=0}^{k_n} \mathbb{P}\Big(X_n = \frac{j}{n}\Big) = \sum_{j=0}^{k_n}\Big(F\Big(\frac{j+1}{n}\Big) - F\Big(\frac{j}{n}\Big)\Big) \\ &= F\Big(\frac{k_n+1}{n}\Big) - F(0) = F\Big(\frac{k_n+1}{n}\Big).\end{aligned}$$

Or, d'après $(\star)$,

$$x < \frac{k_n+1}{n} \leqslant x + \frac{1}{n},$$

et donc, par encadrement,

$$\frac{k_n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x.$$

Par suite, F étant continue en x car X est à densité,

$$F_{X_n}(x) = F\Big(\frac{k_n+1}{n}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x).$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$$

et la suite (X_n) converge en loi vers X.

Exercice 17

Question 1

Les variables $X_1, \dots, X_n$ étant mutuellement indépendantes et suivant toutes des lois de Poisson $\mathcal{P}(1)$, leur somme S_n suit aussi une loi de Poisson de paramètre $1 + \cdots + 1 = n$. Elle a pour espérance et pour variance :

$$\mathbb{E}(S_n) = n \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(S_n) = n.$$

Exercice 17

Question 2

Le théorème limite central s'applique à la suite (X_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi. Il énonce que

$$\overline{X}_n^* = S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

donc en particulier :

$$\mathbb{P}(S_n^* \leqslant 0) = F_{S_n^*}(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(0)$$

c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Exercice 17

Question 3

Comme S_n suit une loi $\mathcal{P}(n)$, on a :

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n = k) = \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$$

d'où, d'après la question **2.**,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \mathrm{e}^n\, \mathbb{P}(S_n \leqslant n) \sim \frac{\mathrm{e}^n}{2}, \qquad n \to \infty.$$

Exercice 18

Le nombre X de fautes dans un devoir de 1500 mots peut être interprété comme le nombre de succès (faire une faute dans un mot) au cours d'une succession de $n = 1500$ épreuves de Bernoulli (écrire un mot) indépendantes et de même paramètre $p = \frac{1}{500}$. Ainsi X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
Comme $n \geqslant 30$, $p \leqslant 0{,}1$ et $np \leqslant 15$, on peut approcher la loi $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np) = \mathcal{P}(3)$.
Ainsi la probabilité de faire plus de 5 fautes dans un devoir de 1500 mots vaut approximativement

$$\mathbb{P}(X \geqslant 5) \simeq 1 - \mathrm{e}^{-3}\Big(1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!}\Big) \simeq 0{,}1847.$$

Exercice 19

Pour tout $i \in [\![1, 22]\!]$, soit X_i la variable aléatoire donnant le nombre de clients fréquentant le magasin durant le i-ième jour ouvrable du mois considéré. Par hypothèse, $X_1, \dots, X_{22}$ sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de Poisson $\mathcal{P}(12)$. Par conséquent, la variable aléatoire

$$S = \sum_{i=1}^{22} X_i$$

qui donne le nombre de clients fréquentant le magasin au cours du mois, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 22 \times 12 = 264$.
Comme $\lambda \geqslant 18$, on peut approcher cette loi par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$, sans oublier d'effectuer une correction de continuité puisqu'on approche une loi discrète par une loi continue.

Ainsi, si N suit une loi $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$, alors $N^* = \frac{N-264}{\sqrt{264}}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et la probabilité d'avoir au moins 250 clients durant le mois vaut donc approximativement

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S \geqslant 250) \simeq \mathbb{P}(N \geqslant 249{,}5) &= \mathbb{P}\Big(N^* \geqslant \frac{249{,}5 - 264}{\sqrt{264}}\Big) \\ &= 1 - \Phi\Big(\frac{249{,}5-264}{\sqrt{264}}\Big) \simeq 1 - \Phi(-0{,}892) \\ &= \Phi(0{,}892) \simeq \Phi(0{,}89) + 0{,}2 \cdot \big(\Phi(0{,}90) - \Phi(0{,}89)\big) \\ &\simeq 0{,}8138.\end{aligned}$$

Exercice 20

En notant X_k la variable aléatoire égale à 1 si le k-ième salarié est au téléphone à un instant t donné et 0 sinon pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ avec $n = 300$, la variable donnant le nombre de lignes nécessaires à l'instant t est $S = X_1 + \cdots + X_n$.
Comme les variables X_k sont indépendantes et suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{10}$, la variable S suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
Puisque $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, on peut approcher la loi de S par celle de la variable gaussienne $N \sim \mathcal{N}\big(np, np(1-p)\big) = \mathcal{N}(30, 27)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, on a donc

$$\mathbb{P}(X \geqslant n) \simeq \mathbb{P}(N \geqslant n) = \mathbb{P}\Big(N^* \geqslant \frac{n-30}{\sqrt{27}}\Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{n-30}{\sqrt{27}}\Big).$$

On prendra donc un nombre n de lignes téléphoniques tel que

$$\frac{n-30}{\sqrt{27}} \geqslant \Phi^{-1}(0{,}975) \simeq 1{,}96 \quad \Longleftrightarrow \quad n \geqslant 41$$

pour que la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant soit inférieure à 0,025.