

Fonctions de plusieurs variables : calcul différentiel

Feuille d'exercices

1 On considère la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y \sin x + \cos y$.

- ☞ 1. Calculer les dérivées partielles de f en tout point de \mathbb{R}^2 .
 2. Calculer la dérivée directionnelle $\partial_V f(M)$ de f en $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ selon le vecteur $V = (h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
 3. Vérifier que $\partial_V f(M) = \langle \nabla f(M), V \rangle$.

2 Déterminer les vecteurs $V \in \mathbb{R}^2$ unitaires tels que la fonction $(x, y) \mapsto \sqrt[3]{xy}$ admet une dérivée dans la direction V à l'origine.

3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(0, 1) = 0$, $\partial_1 f(0, 1) = 1$ et $\partial_2 f(0, 1) = 2$.

1. Écrire le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de $(0, 1)$.
 2. En déduire le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 des fonctions

$$t \mapsto f(-2t, \mathbf{e}^t) \quad \text{et} \quad t \mapsto f\left(t, \frac{\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{-t}}{2}\right)$$

ainsi que la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(-2t, \mathbf{e}^t)}{f\left(t, \frac{\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{-t}}{2}\right)}.$$

4 Étudier la continuité, l'existence de dérivées partielles, leur continuité ainsi que la classe \mathcal{C}^1 de la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

5 Montrer que la fonction $X \mapsto \frac{1}{\|X\|^2}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En déterminer le développement limité à l'ordre 1 au voisinage d'un point A .

6 Déterminer le plan tangent à l'origine des fonctions suivantes, éventuellement prolongées par continuité :

1. $(x, y) \mapsto 1 + x - \sqrt{1 + x - y}$; 3. $(x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + \cos(x + y)}}$;
 2. $(x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2 + x + \ln(1 + y)}}$; 4. $(x, y) \mapsto \frac{\sin(x + y) - \sin x - \sin y}{xy}$.

7 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto f(u, v)$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Exprimer les dérivées partielles de la fonction $g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(xz, yz)$ en fonction de celles de f .

8 Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{U} convexe de \mathbb{R}^n .

1. Montrer que si $\nabla f(X) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{U}$, alors f est constante.
 2. Montrer que si $X \mapsto \nabla f(X)$ est constante sur \mathcal{U} , alors f est une fonction affine i.e. il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f - b$ soit la restriction d'une forme linéaire. Que vaut b lorsque $0 \in \mathcal{U}$?

9 Déterminer les fonctions $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 à déterminer, vérifiant pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$:

$$1. \begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 2x + \frac{1}{y} \\ \partial_2 f(x, y) = 2y - \frac{y}{x^2} \end{cases}; \quad 2. \begin{cases} \partial_1 f(x, y) = \frac{2+x}{y} \\ \partial_2 f(x, y) = \frac{2+y}{x} \end{cases}.$$

10 1. Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et α une constante réelle.

☛ On dit que f est positivement homogène de degré α si :

$$\forall t > 0, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(tx_1, \dots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n).$$

- a. Montrer que si f est positivement homogène de degré α , alors ses dérivées partielles sont positivement homogènes de degré $\alpha - 1$.
 b. Montrer que si f est positivement homogène de degré α , on a :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \alpha f(x_1, \dots, x_n).$$

- c. On suppose réciproquement que f vérifie la relation de la question précédente. Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, l'application $\varphi : t \mapsto f(tx_1, \dots, tx_n)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall t > 0, \quad \varphi'(t) = \frac{\alpha}{t} \varphi(t).$$

En déduire que f est positivement homogène de degré α .

Indication. On pourra dériver la fonction $t \mapsto t^{-\alpha} \varphi(t)$.

2. On veut déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}.$$

- a. Déterminer une solution positivement homogène f_0 de $(*)$.
 b. Montrer que f est solution de $(*)$ si, et seulement si, $g = f - f_0$ vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0.$$

En déduire que g soit être constante.

- c. Conclure.

11 Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{U} convexe de \mathbb{R}^n . On suppose \star qu'il existe un réel M tel que $\|\nabla f(A)\| \leq M$ pour tout $A \in \mathcal{U}$.

Montrer que :

$$\forall A, B \in \mathcal{U}, \quad |f(B) - f(A)| \leq M \|B - A\|.$$

12 Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On définit la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y - \varphi(x)$.

- Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .
- Décrire les lignes de niveau de f .
- Soient $A = (x_0, y_0)$ un point de \mathbb{R}^2 et $\lambda = f(A)$.
 - Déterminer un vecteur tangent en A à la ligne \mathcal{L}_λ de niveau λ de f .
 - Vérifier que ce vecteur est orthogonal au gradient $\nabla f(A)$.

13 Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n .

★ On dit que f présente en $A \in \mathcal{U}$:

> un *maximum global* si :

$$\forall X \in \mathcal{U}, \quad f(X) \leq f(A).$$

> un *maximum local* s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall X \in \mathcal{U} \cap \mathcal{B}(A, r), \quad f(X) \leq f(A).$$

On définit de même les notions de minimum global et local.

- Montrer que si f admet en $A \in \mathcal{U}$ un extremum local, alors A est un *point critique* de f , i.e. $\nabla f(A) = 0$.
- La réciproque est-elle vraie ?

14 Cet exercice utilise les notions introduites et le résultat démontré dans l'exercice 13.

☞ On considère la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 3x^4 - 4x^2y + y^2$.

- Déterminer l'unique point critique de f .
- Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la droite Δ_a d'équation $y = ax$. Montrer que, lorsque (x, y) parcourt la droite Δ_a , $f(x, y)$ atteint un minimum en $(0, 0)$.
 - Soit \mathcal{P} la parabole d'équation $y = 2x^2$. Montrer que, lorsque (x, y) parcourt la parabole \mathcal{P} , $f(x, y)$ atteint un maximum en $(0, 0)$.
 - Que peut-on déduire des questions précédentes ?
- Vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$.
 - En quoi la factorisation précédente éclaire-t-elle les cas étudiés en 2.a. et 2.b. ?

15 Cet exercice utilise les notions introduites et le résultat démontré dans l'exercice 13.

On considère la fonction

$$f : (x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n \mapsto \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right).$$

- Déterminer les points critiques de f .

- Montrer que f atteint son minimum global (à préciser) en chacun de ses points critiques.

16 ☛ On considère un intervalle I de \mathbb{R} de la forme $I =]-a, a[$, où $a > 0$ est un réel donné. On considère une fonction $f : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . On suppose qu'il existe un réel $\kappa \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |\partial_1 f(x, y)| + |\partial_2 f(x, y)| \leq \kappa.$$

- Soient (x, y) et (x', y') deux couples de I^2 . En utilisant une fonction partielle, montrer que :

$$|f(x, y) - f(x', y')| \leq \kappa \max(|x - x'|, |y - y'|).$$

- Pour $(\alpha, \beta) \in I^2$ donné, on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$ ainsi que la relation de récurrence $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose également :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \max(|u_{n+2} - u_{n+1}|, |u_{n+1} - u_n|).$$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} \leq \kappa a_n$.
- Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente.
- En déduire que la suite (u_n) est convergente.

- Montrer que la limite de la suite (u_n) est indépendante du choix du couple (α, β) .

17 On considère la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ?
- Calculer $\partial_{1,2}^2 f(0, 0)$ et $\partial_{2,1}^2 f(0, 0)$. Que peut-on en déduire ?

18 ☞ Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , on pose :

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f.$$

Montrer que si $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 , on a :

$$\Delta(fg) = f(\Delta g) + 2 \langle \nabla f, \nabla g \rangle + (\Delta f)g.$$

19 ☞ Calculer le développement limité au second ordre des fonctions suivantes au voisinage du point A indiqué :

- $(x, y) \mapsto xy + e^y, \quad A = (0, 0);$
- $(x, y) \mapsto e^{x^2-1} \cos y, \quad A = (1, 0);$
- $(x, y, z) \mapsto xyz + xy + yz + zx, \quad A = (1, 0, 1);$
- $(x, y, z) \mapsto \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, \quad A = (1, 1, 1).$

- 20** **1.** Soient f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} . On définit sur $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ la fonction F par :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad F(x, y) = f\left(x + \frac{1}{y}\right) + g\left(x - \frac{1}{y}\right).$$

- a.** Justifier que \mathcal{U} est une partie ouverte de \mathbb{R}^2 .
b. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{U} et vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) - y^4 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) - 2y^3 \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0. \quad (*)$$

- 2.** Réciproquement, soit F une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{U} vérifiant la relation $(*)$. On définit sur $\mathcal{V} = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s > t\}$ la fonction G par :

$$\forall (s, t) \in \mathcal{V}, \quad G(s, t) = F\left(\frac{s+t}{2}, \frac{2}{s-t}\right).$$

- a.** Justifier que \mathcal{V} est une partie ouverte de \mathbb{R}^2 .
b. On admet que la fonction G est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{V} . Montrer que :

$$\forall (s, t) \in \mathcal{V}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial s \partial t}(s, t) = 0.$$

- c.** En déduire l'existence de deux fonctions f et g de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad F(x, y) = f\left(x + \frac{1}{y}\right) + g\left(x - \frac{1}{y}\right).$$

- 21** Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n . Soient $A \in \mathcal{U}$ et $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(A, r) \subset \mathcal{U}$.

- 1.** Soit $H \in \mathcal{B}(0, r)$.
a. Justifier que la fonction partielle $u : t \in [0, 1] \mapsto f(A + tH)$ est bien définie.
b. Justifier que u est de classe \mathcal{C}^2 et exprimer $u'(t)$ et $u''(t)$ pour $t \in [0, 1]$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de f .
c. En déduire que :

$$f(A + H) = f(A) + \sum_{j=1}^n \partial_j f(A) h_j + \sum_{1 \leq i, j \leq n} h_i h_j \int_0^1 (1-t) \partial_{i,j}^2 f(A + tH) dt.$$

- 2.** On souhaite établir le développement limité de f à l'ordre 2 en A :

$$f(A + H) = f(A) + \sum_{j=1}^n \partial_j f(A) h_j + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_{i,j}^2 f(A) h_i h_j + o(\|H\|^2), \quad H \rightarrow 0.$$

- a.** En utilisant **1.c.**, montrer que :

$$\begin{aligned} f(A + H) - f(A) - \sum_{j=1}^n \partial_j f(A) h_j - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_{i,j}^2 f(A) h_i h_j &= \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} h_i h_j \int_0^1 (1-t) (\partial_{i,j}^2 f(A + tH) - \partial_{i,j}^2 f(A)) dt. \end{aligned}$$

- b.** Étant donné $\varepsilon > 0$, justifier l'existence d'un réel $\varrho \in]0, r[$ tel que :

$$\forall X \in \mathcal{B}(A, \varrho), \quad \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |\partial_{i,j}^2 f(X) - \partial_{i,j}^2 f(A)| \leq \frac{2\varepsilon}{n^2}.$$

- c.** Conclure.

- 22** Soient $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n et A un point de \mathcal{U} . Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}^n$ et $S \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique tels que :

$$f(A + H) = \alpha + \langle U, H \rangle + \frac{1}{2} {}^t H S H + o(\|H\|^2), \quad H \rightarrow 0.$$

- Justifier que $\alpha = f(A)$, $U = \nabla f(A)$ et $S = \nabla^2 f(A)$.