

Travaux dirigés
Fonctions de plusieurs variables : calcul différentiel

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2018/2019

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 1 / 71

Exercice 3 Q 1

Exercice 3
Question 1

La fonction f étant de classe \mathcal{C}^1 , elle admet au voisinage de A le développement limité

$$f(h, 1+k) = f(0, 1) + \partial_1 f(0, 1)h + \partial_2 f(0, 1)k + o(\|(h, k)\|)$$

$$= h + 2k + o(\|(h, k)\|)$$

lorsque $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 2 / 71

Exercice 3 Q 2

Exercice 3
Question 2

On a d'abord

$$f(-2t, e^t) = f(-2t, 1 + t + o(t)) = -2t + 2t + o(\sqrt{5t^2 + o(t)^2}) = o(t), \quad t \rightarrow 0$$

ainsi que

$$f\left(t, \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) = f(t, 1 + o(t)) = t + o(t), \quad t \rightarrow 0.$$

Par suite,

$$\frac{f(-2t, e^t)}{f\left(t, \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)} = \frac{o(t)}{t + o(t)} = \frac{o(1)}{1 + o(1)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 3 / 71

Exercice 4

Exercice 4

Tout d'abord, la fonction f est continue en tout point de l'ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ d'après les théorèmes opératoires. En effet, pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, il existe un voisinage \mathcal{V} de (x_0, y_0) inclus dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, sur lequel on dispose donc d'une unique expression pour f :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{V}, \quad f(x, y) = y^2 \sin \frac{x}{y}.$$

Étant donné un point $(x_0, 0)$ du complémentaire, on observe que (même si $y = 0$!)

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x, y)| \leq y^2 \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, 0)} 0,$$

d'où l'on déduit par encadrement que

$$f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, 0)} 0 = f(x_0, 0),$$

ce qui signifie que f est continue en $(x_0, 0)$.

La fonction f est donc continue sur \mathbb{R}^2 .

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 4 / 71

Exercice 4

Exercice 4

Pour commencer, la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 (donc admet des dérivées partielles continues) sur l'ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ par opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1 avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \partial_1 f(x, y) = y \cos \frac{x}{y}, \quad \partial_2 f(x, y) = 2y \sin \frac{x}{y} - x \cos \frac{x}{y}.$$

On considère à présent un point de la forme $(x_0, 0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Existence de $\partial_1 f(x_0, 0)$

La fonction partielle $x \mapsto f(x, 0) = 0$ est dérivable en x_0 ce qui justifie l'existence de $\partial_1 f(x_0, 0) = 0$.

La fonction f admet donc une dérivée partielle $\partial_1 f$ sur \mathbb{R}^2 :

$$\partial_1 f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} y \cos \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 5 / 71

Exercice 4

Exercice 4

Continuité de $\partial_1 f$ en $(x_0, 0)$

On a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\partial_1 f(x, y)| \leq |y| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, 0)} 0.$$

Par suite,

$$\partial_1 f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, 0)} 0 = \partial_1 f(x_0, 0).$$

La dérivée partielle $\partial_1 f$ est donc continue sur \mathbb{R}^2 .

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 6 / 71

Exercice 4

Exercice 4

Existence de $\partial_2 f(x_0, 0)$

La fonction partielle

$$y \mapsto f(x_0, y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{x_0}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

est dérivable en 0 : en effet,

$$\frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y} = y \sin \frac{x_0}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$$

d'où l'existence de $\partial_2 f(x_0, 0) = 0$.

La fonction f admet donc une dérivée partielle $\partial_2 f$ sur \mathbb{R}^2 :

$$\partial_2 f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} 2y \sin \frac{x}{y} - x \cos \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 7 / 71

Exercice 4

Exercice 4

Continuité de $\partial_2 f$ en $(x_0, 0)$

Si $x_0 \neq 0$, $2y \sin \frac{x_0}{y}$ converge vers 0 alors que $x \cos \frac{x_0}{y}$ diverge lorsque $(x, y) \rightarrow (x_0, 0)$. La dérivée partielle $\partial_2 f$ n'est donc pas continue en $(x_0, 0)$.

Si $x_0 = 0$, alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\partial_2 f(x, y)| \leq 2|y| + |x| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0,$$

d'où l'on déduit que

$$\partial_2 f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 = \partial_2 f(0, 0)$$

et $\partial_2 f$ est donc continue en $(0, 0)$.

Classe \mathcal{C}^1

La fonction f n'est donc pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 8 / 71

Exercice 5

Exercice 5

On a :

$$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad f(X) = \frac{1}{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

La fonction f est donc de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

Ses dérivées partielles sont données par :

$$\forall j \in [1, n], \quad \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \partial_j f(X) = -\frac{2x_j}{\|X\|^4}.$$

Le gradient de f vaut donc $\nabla f(X) = -\frac{2}{\|X\|^4} X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et le développement limité de f en $A \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} f(X) &= f(A) + \langle \nabla f(A), X - A \rangle + o(\|X - A\|) \\ &= \frac{1}{\|A\|^2} - \frac{2}{\|A\|^4} \langle A, X - A \rangle + o(\|X - A\|), \quad X \rightarrow A. \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 9 / 71

Exercice 5

Remarque. On a vu en exemple dans le cours que la fonction

$$g : X \in \mathbb{R}^n \mapsto \|X\|^2$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n avec $\nabla g(X) = 2X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

On a $f = 1/g$ et d'après les résultats obtenus, la formule

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \nabla f(X) = -\frac{1}{g(X)^2} \nabla g(X)$$

est satisfaite, en accord avec les théorèmes opératoires du cours.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 10 / 71

Exercice 6 Q 2

Exercice 6

Question 2

La fonction

$$f : (x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2+x} + \ln(1+y)}$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $] -1, 1[\times] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ par opérations sur les fonctions \mathcal{C}^1 avec, pour tout $(x, y) \in] -1, 1[\times] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$:

$$\partial_1 f(x, y) = -\frac{1}{2(2+x + \ln(1+y))^{3/2}}$$

et

$$\partial_2 f(x, y) = -\frac{1}{2(2+x + \ln(1+y))^{3/2}(1+y)}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 11 / 71

Exercice 6 Q 2

Elle admet donc un développement limité du premier ordre à l'origine :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + \partial_1 f(0, 0)x + \partial_2 f(0, 0)y + o(\|(x, y)\|) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}x - \frac{1}{4\sqrt{2}}y + o(\|(x, y)\|), \quad (x, y) \rightarrow (0, 0). \end{aligned}$$

Le graphe de f admet donc au point $(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ le plan tangent d'équation

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}x - \frac{1}{4\sqrt{2}}y.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 12 / 71

Exercice 7

Exercice 7

Par application de la formule de dérivation d'une composée, on obtient pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial(xz)}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u}(xz, yz) + \frac{\partial(yz)}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v}(xz, yz) = z \frac{\partial f}{\partial u}(xz, yz), \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) &= z \frac{\partial f}{\partial v}(xz, yz) \end{aligned}$$

et enfin

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = x \frac{\partial f}{\partial u}(xz, yz) + y \frac{\partial f}{\partial v}(xz, yz).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 13 / 71

Exercice 8 Q 1

Exercice 8

Question 1

Pour $A \neq B \in \mathcal{U}$ et $V = \overline{AB} = B - A$ donnés, la fonction partielle $u : t \mapsto f(A + tV)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ (car le segment $[A, B]$ est inclus dans le convexe \mathcal{U}) avec :

$$\forall t \in [0, 1], \quad u'(t) = \langle \nabla f(A + tV), V \rangle.$$

Par application du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral à u sur $[0, 1]$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} f(B) &= u(1) = u(0) + \int_0^1 u'(t) dt \\ &= f(A) + \int_0^1 \langle \nabla f(A + t(B - A)), B - A \rangle dt. \end{aligned}$$

Par suite, si $\nabla f(X) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{U}$, alors $f(B) = f(A)$ pour tout $B \in \mathcal{U}$ si bien que f est constante sur \mathcal{U} .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 14 / 71

Exercice 8 Q 2

Exercice 8

Question 2

De même, si $\nabla f(X) = W_0$ pour tout $X \in \mathcal{U}$, alors pour $A \in \mathcal{U}$ donné il vient d'après la formule précédente :

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathcal{U}, \quad f(X) &= f(A) + \int_0^1 \langle W_0, X - A \rangle dt \\ &= f(A) + \langle W_0, X - A \rangle = b + \langle W_0, X \rangle \end{aligned}$$

où $b = f(A) - \langle W_0, A \rangle$ et f est donc affine.

Si $0 \in \mathcal{U}$, on peut prendre $A = 0$ et l'on a alors $b = f(0)$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 15 / 71

Exercice 9 Q 1

Exercice 9

Question 1

Les relations ont un sens sur l'ouvert $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On procède par analyse-synthèse pour déterminer les fonctions $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 satisfaisant les relations

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad \partial_1 f(x, y) = 2x + \frac{1}{y}, \quad \partial_2 f(x, y) = 2y - \frac{x}{y^2}. \quad (1)$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 16 / 71

Exercice 9 Q 1

Analyse

Soit f solution du problème.

- Pour $y \in \mathbb{R}^*$ donné, la fonction partielle $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y)$ ayant pour dérivée

$$x \in \mathbb{R} \mapsto 2x + \frac{1}{y}$$
 que l'on primitive aisément, il existe une constante (par rapport à x , mais dépendant de y) $K(y)$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + \frac{x}{y} + K(y). \quad (2)$$
- La fonction K est nécessairement de classe \mathcal{C}^1 par opérations sur les fonctions \mathcal{C}^1 : en effet, en évaluant la formule précédente en $x = 0$, on obtient

$$\forall y \in \mathbb{R}^*, K(y) = f(0, y).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 17 / 71

Exercice 9 Q 1

- Par suite, en dérivant (2) par rapport à y , il vient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \partial_2 f(x, y) = -\frac{x}{y^2} + K'(y).$$

Par comparaison à (1), on en déduit que :

$$\forall y \in \mathbb{R}^*, K'(y) = 2y$$

d'où l'existence de deux constantes K_1 et K_2 telles que :

$$\forall y \in \mathbb{R}^*, K(y) = \begin{cases} y^2 + K_1 & \text{si } y < 0 \\ y^2 + K_2 & \text{si } y > 0 \end{cases}.$$

Ainsi les fonctions solutions sont nécessairement de la forme

$$f : (x, y) \in \mathcal{U} \mapsto \begin{cases} x^2 + \frac{x}{y} + y^2 + K_1 & \text{si } y < 0 \\ x^2 + \frac{x}{y} + y^2 + K_2 & \text{si } y > 0 \end{cases},$$

où K_1 et K_2 sont deux constantes réelles.

Remarque. Il aurait été plus délicat de commencer par primitiver par rapport à y . Pourquoi ?

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 18 / 71

Exercice 9 Q 1

Synthèse

Réciproquement, on vérifie immédiatement que les fonctions précédentes sont de classe \mathcal{C}^1 sur chacun des ouverts $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$ (où les théorèmes opératoires s'appliquent car la fonction n'est définie que par une seule formule) recouvrant \mathcal{U} donc sur \mathcal{U} , avec les dérivées partielles prescrites.

Conclusion

Les solutions sont les fonctions de la forme

$$f : (x, y) \in \mathcal{U} \mapsto \begin{cases} x^2 + \frac{x}{y} + y^2 + K_1 & \text{si } y < 0 \\ x^2 + \frac{x}{y} + y^2 + K_2 & \text{si } y > 0 \end{cases},$$

où K_1 et K_2 sont deux constantes réelles.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 19 / 71

Exercice 10 Q 1.a

Exercice 10

Question 1.a

Soient f homogène de degré α et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour $t > 0$ donné, on a par hypothèse :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f(tx_1, \dots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n).$$

En dérivant par rapport à x_j on en déduit (par application des règles de dérivation d'une composée), pour tout (x_1, \dots, x_n) :

$$t \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx_1, \dots, tx_n) = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(tx_1, \dots, tx_n) = t^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n)$$

et la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est donc homogène de degré $\alpha - 1$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 20 / 71

Exercice 10 Q 1.b

Exercice 10

Question 1.b

Soit f homogène de degré α . Pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ donné, on a donc :

$$\forall t > 0, f(tx_1, \dots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n).$$

En dérivant par rapport à t , on obtient :

$$\forall t > 0, \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx_1, \dots, tx_n) = \alpha t^{\alpha-1} f(x_1, \dots, x_n)$$

d'où, pour $t = 1$:

$$\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \alpha f(x_1, \dots, x_n).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 21 / 71

Exercice 10 Q 1.c

Exercice 10

Question 1.c

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. D'après un calcul de la question b., la fonction $\varphi : t \mapsto f(tx_1, \dots, tx_n)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* avec :

$$\forall t > 0, \varphi'(t) = \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx_1, \dots, tx_n).$$

Si f satisfait la relation d'Euler (la relation de la question b.), on a donc :

$$\forall t > 0, \varphi'(t) = \frac{1}{t} \left(\sum_{j=1}^n tx_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx_1, \dots, tx_n) \right) = \frac{\alpha}{t} f(tx_1, \dots, tx_n) = \frac{\alpha}{t} \varphi(t).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 22 / 71

Exercice 10 Q 1.c

La fonction $t \mapsto t^{-\alpha} \varphi(t)$ est dérivable, de dérivée

$$t \mapsto -\alpha t^{-\alpha-1} \varphi(t) + t^{-\alpha} \varphi'(t) = 0.$$

Elle est donc constante sur \mathbb{R}_+^* ; en d'autres termes, il existe une constante réelle λ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(t) = \lambda t^\alpha.$$

En évaluant la formule en $t = 1$, on obtient $\lambda = \varphi(1) = f(x_1, \dots, x_n)$ d'où :

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = \varphi(t) = \lambda t^\alpha = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n)$$

et f est homogène de degré α .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 23 / 71

Exercice 10 Q 2.a

Exercice 10

Question 2.a

Analyse

Si f_0 homogène de degré α est solution de (*), alors

$$(x, y) \mapsto x \frac{\partial f_0}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f_0}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$$

est homogène de degré $\alpha - 1 + 1$ d'après la question 1.a. Or

$$\forall t > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{(tx)^4 + (ty)^4} = t^2 \sqrt{x^4 + y^4}$$

donc nécessairement $\alpha = 2$.

D'après la question b., on a alors nécessairement

$$f_0 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{2} \sqrt{x^4 + y^4}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 24 / 71

Exercice 10 Q 2.a

Synthèse
 On vérifie que la fonction

$$f_0 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{x^4 + y^4}$$

est bien solution du problème.
 Tout d'abord elle est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \frac{\partial f_0}{\partial x}(x, y) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + y^4}}, \quad \frac{\partial f_0}{\partial y}(x, y) = \frac{y^3}{\sqrt{x^4 + y^4}}.$$

Par ailleurs, la fonction partielle $x \mapsto f(x, 0) = x^2$ est dérivable à l'origine, d'où l'existence de $\frac{\partial f_0}{\partial x}(0, 0) = 0$ et, de même, celle de $\frac{\partial f_0}{\partial y}(0, 0) = 0$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 25 / 71

Exercice 10 Q 2.a

Enfin, pour $x \neq 0$,

$$\left| \frac{\partial f_0}{\partial x}(x, y) \right| \leq \frac{|x|^3}{\sqrt{x^4}} = |x|.$$

L'inégalité étant évidente pour $x = 0$, on a donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \left| \frac{\partial f_0}{\partial x}(x, y) \right| \leq |x| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0,$$

d'où l'on déduit par encadrement que

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 = \frac{\partial f_0}{\partial x}(0, 0)$$

et $\frac{\partial f_0}{\partial x}$ est continue à l'origine. On montrerait de même que $\frac{\partial f_0}{\partial y}$ est également continue à l'origine.
 La fonction f_0 est donc continue sur \mathbb{R}^2 et l'on vérifie alors que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (nul ou non),

$$x \frac{\partial f_0}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f_0}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 26 / 71

Exercice 10 Q 2.b

Exercice 10
 Question 2.b

L'application L qui, à une fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , associe la fonction

$$L(h) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)$$

est linéaire par linéarité de la dérivation. Dès lors, f_0 étant solution de $(*)$, une fonction f est solution de $(*)$ si, et seulement si,

$$L(f) = L(f_0) \iff L(f - f_0) = 0$$

c'est-à-dire, en notant $g = f - f_0$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 27 / 71

Exercice 10 Q 2.b

Cette condition signifie, d'après les questions 1.b. et 1.c., que g est homogène de degré 0 c'est-à-dire constante. En effet, si g est homogène de degré 0 alors, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donné, on a

$$\forall t > 0, \quad g(tx, ty) = t^0 g(x, y) = g(x, y)$$

d'où, en passant à la limite lorsque $t \rightarrow 0$, $g(0, 0) = g(x, y)$. La réciproque est évidente.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 28 / 71

Exercice 10 Q 2.c

Exercice 10
 Question 2.c

D'après les questions a. et b., les fonctions satisfaisant la condition $(*)$ sont les fonctions

$$f = f_0 + k : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{x^4 + y^4} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 29 / 71

Exercice 11

Pour $A \neq B \in \mathcal{U}$ et $V = \overrightarrow{AB} = B - A$ donnés, la fonction partielle $u : t \mapsto f(A + tV)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ (car le segment $[A, B]$ est inclus dans le convexe \mathcal{L}) avec :

$$\forall t \in [0, 1], \quad u'(t) = \langle \nabla f(A + tV), V \rangle.$$

Par application du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral à u sur $[0, 1]$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} f(B) &= u(1) = u(0) + \int_0^1 u'(t) dt \\ &= f(A) + \int_0^1 \langle \nabla f(A + t(B - A)), B - A \rangle dt. \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 30 / 71

Exercice 11

Par suite,

$$\begin{aligned} |f(B) - f(A)| &\leq \int_0^1 |\langle \nabla f(A + t(B - A)), B - A \rangle| dt \\ &\leq \int_0^1 \|\nabla f(A + t(B - A))\| \|B - A\| dt \\ &\leq \int_0^1 M \|B - A\| dt = M \|B - A\| \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 31 / 71

Exercice 12 Q 1

Exercice 12
 Question 1

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 par opérations sur les fonctions \mathcal{C}^1 .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 32 / 71

Exercice 12 Q 2

Exercice 12

Question 2

La ligne \mathcal{L}_0 de niveau 0 de f est le graphe de la fonction φ . La ligne niveau λ de f est le graphe de la fonction $\varphi + \lambda$, elle se déduit de \mathcal{L}_0 par translation de vecteur $\lambda\vec{j}$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 33 / 71

Exercice 12 Q 3.a

Exercice 12

Question 3.a

La tangente en A à \mathcal{L}_λ a pour équation $y = y_0 + \varphi'(x_0)(x - x_0)$. Elle est donc dirigée par le vecteur $(1, \varphi'(x_0))$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 34 / 71

Exercice 12 Q 3.b

Exercice 12

Question 3.b

Le gradient de f en A est donné par

$$\nabla f(A) = (\partial_1 f(A), \partial_2 f(A)) = (-\varphi'(x_0), 1),$$

qui est orthogonal à $(1, \varphi'(x_0))$. Le gradient est donc orthogonal aux lignes de niveau.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 35 / 71

Exercice 13 Q 1

Exercice 13

Question 1

On suppose que f admet en A un extremum local, par exemple un maximum (sinon, $-f$ en admet un). Puisque \mathcal{U} est ouvert, il existe donc $r > 0$ tel que :

$$\forall X \in \mathcal{B}(A, r), \quad f(X) \leq f(A).$$

Étant donné un vecteur $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la fonction partielle $u : t \mapsto f(A + tV)$ admet alors un maximum local en 0 : pour $|t| < \frac{r}{\|V\|}$, on a $\|tV\| < r$ d'où $A + tV \in \mathcal{B}(A, r)$ et $u(t) = f(A + tV) \leq f(A) = u(0)$. Le résultat étant acquis pour les fonctions d'une variable, cela entraîne $\partial_V f(A) = u'(0) = 0$. Ainsi toutes les dérivées directionnelles donc en particulier partielles de f s'annulent en A , ce qui signifie que $\nabla f(A) = 0$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 36 / 71

Exercice 13 Q 1

Exercice 13

Question 1

Pour établir le résultat concernant la fonction partielle u , on écrit que :

$$\forall t \in \left[-\frac{r}{\|V\|}, 0\right], \quad \frac{u(t) - u(0)}{t} \geq 0$$

puisque u admet un maximum en 0 d'où, en passant à la limite lorsque $t \rightarrow 0$, $t < 0$, $u'(0) \geq 0$.
En écrivant pour les mêmes raisons

$$\forall t \in \left]0, \frac{r}{\|V\|}\right], \quad \frac{u(t) - u(0)}{t} \leq 0$$

puis en passant à la limite lorsque $t \rightarrow 0$, $t > 0$, on obtient $u'(0) \leq 0$, d'où finalement $u'(0) = 0$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 37 / 71

Exercice 13 Q 2

Exercice 13

Question 2

La réciproque est déjà fautive pour les fonctions d'une variable : la fonction $x \mapsto x^3$ n'admet pas d'extremum local en 0 alors que sa dérivée s'y annule.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 38 / 71

Exercice 14 Q 1

Exercice 14

Question 1

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1 f(x, y) = 4x(3x^2 - 2y), \quad \partial_2 f(x, y) = 2(-2x^2 + y).$$

Le point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est donc point critique de f si, et seulement si,

$$\begin{cases} x(3x^2 - 2y) = 0 \\ -2x^2 + y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0 \text{ ou } \begin{cases} 3x^2 - 2y = 0 \\ -2x^2 + y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0.$$

La fonction f admet donc $(0, 0)$ comme seul point critique.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 39 / 71

Exercice 14 Q 2.a

Exercice 14

Question 2.a

Les points de la droite Δ_a sont les points de la forme $(x, y) = (t, at)$, $t \in \mathbb{R}$, pour lesquels

$$f(x, y) = f(t, at) = t^2(3t^2 - 4at + a^2) = \varphi(t).$$

L'étude de la fonction φ montre qu'elle admet un minimum local en $t = 0$, égal à 0. Cela peut aussi être établi grâce à un équivalent : pour $a \neq 0$,

$$\varphi(t) \sim a^2 t^2 \geq 0, \quad t \rightarrow 0,$$

si bien que $\varphi(t) \geq 0 = \varphi(0)$ au voisinage de 0. Pour $a = 0$, le résultat est immédiat.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 40 / 71

Exercice 14 Q 2.b

Exercice 14

Question 2.b

Les points de la parabole \mathcal{P} sont les points de la forme $(x, y) = (t, 2t^2)$, pour lesquels $f(x, y) = -t^4 \leq 0 = f(0, 0)$. La fonction f présente donc un maximum en $(0, 0)$ le long de la parabole \mathcal{P} .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 41 / 71

Exercice 14 Q 2.c

Exercice 14

Question 2.c

D'après l'exercice 13 et la question 1., les seuls extremums locaux éventuels de f sont les points critiques de f , il n'y en a donc qu'un ici : $(0, 0)$, qui réciproquement n'est pas un extremum local d'après a. et b.. La fonction f ne présente donc aucun extremum local ni global.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 42 / 71

Exercice 14 Q 3.a

Exercice 14

Question 3.a

On développe...

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 43 / 71

Exercice 14 Q 3.b

Exercice 14

Question 3.b

D'après a., la fonction f est négative entre les paraboles d'équations $y = x^2$ et $y = 3x^2$ et positive en dehors (faire un dessin !). Elle ne garde donc pas un signe constant au voisinage de $(0, 0)$, qui ne peut donc être extremum de f puisque $f(0, 0) = 0$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 44 / 71

Exercice 15 Q 1

Exercice 15

Question 1

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $]0, +\infty[$ par opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Ses dérivées partielles sont données par :

$$\forall j \in [1, n], \quad \forall X = (x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n, \quad \partial_j f(X) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_j^2} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Si X est point critique, alors tous les x_j sont donc égaux à

$$t = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}}.$$

Réciproquement, si tous les x_j sont égaux à un réel $t > 0$, on vérifie que X annule toutes les dérivées partielles de f .

Les points critiques de f sont donc les points de la forme $X = (t, \dots, t)$, $t > 0$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 45 / 71

Exercice 15 Q 2

Exercice 15

Question 2

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n euclidien canonique aux vecteurs y et z de coordonnées $y_k = \sqrt{x_k}$ et $z_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}}$, $1 \leq k \leq n$, on obtient :

$$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad n^2 = \langle y, z \rangle^2 \leq \|y\|^2 \|z\|^2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) = f(X),$$

avec égalité si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = tz$, i.e. $x_k = t$ pour tout $k \in [1, n]$.

Comme $f(t, \dots, t) = n^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction f admet donc un minimum global égal à n^2 en chacun de ses points critiques.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 46 / 71

Exercice 17 Q 1

Exercice 17

Question 1

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par opérations sur les fonctions \mathcal{C}^1 , avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \partial_1 f(x, y) = \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Par ailleurs, la fonction partielle $u : x \mapsto f(x, 0) = 0$ est dérivable en 0 d'où l'existence de $\partial_1 f(0, 0) = u'(0) = 0$.

Ainsi f admet sur \mathbb{R}^2 la dérivée partielle

$$\partial_1 f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

dont il reste à justifier la continuité à l'origine.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 47 / 71

Exercice 17 Q 1

Or, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, en notant $r = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$|\partial_1 f(x, y)| \leq \frac{|y|(|x|^4 + |y|^4 + 4x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{r(r^4 + r^4 + 4r^4)}{r^4} = 6r \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

d'où, par encadrement,

$$\partial_1 f(x, y) \xrightarrow[\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}}{0} = \partial_1 f(0, 0)$$

et $\partial_1 f$ est continue en $(0, 0)$ donc finalement sur \mathbb{R}^2 .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 48 / 71

Exercice 17 Q 1

On observe par ailleurs que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = -f(y, x)$$

d'où l'existence de

$$\partial_2 f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto -\partial_1 f(y, x) = \begin{cases} \frac{x(x^4 - y^4 - 4x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

également continue sur \mathbb{R}^2 .
La fonction f est donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 49 / 71

Exercice 17 Q 2

Exercice 17

Question 2

Calcul de $\partial_{1,2}^2 f(0,0)$
La fonction partielle

$$v : x \mapsto \partial_2 f(x, 0) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} = x$$

est dérivable en 0, d'où l'existence de $\partial_{1,2}^2 f(0,0) = v'(0) = 1$.

Calcul de $\partial_{2,1}^2 f(0,0)$
La fonction partielle

$$w : y \mapsto \partial_1 f(0, y) = \begin{cases} -y & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} = -y$$

est dérivable en 0, d'où l'existence de $\partial_{2,1}^2 f(0,0) = w'(0) = -1$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 50 / 71

Exercice 17 Q 2

On constate que $\partial_{1,2}^2 f(0,0) \neq \partial_{2,1}^2 f(0,0)$. Par contrapositive du théorème de Schwarz, on en déduit que la fonction f n'est pas de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 51 / 71

Exercice 18

Soient $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 .
Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la formule de Leibniz donne

$$\partial_i^2 (fg) = (\partial_i^2 f)g + 2(\partial_i f)(\partial_i g) + f(\partial_i^2 g).$$

On en déduit immédiatement la formule attendue :

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= \sum_{i=1}^n \partial_i^2 (fg) = \sum_{i=1}^n (\partial_i^2 f)g + 2 \sum_{i=1}^n (\partial_i f)(\partial_i g) + \sum_{i=1}^n f(\partial_i^2 g) \\ &= (\Delta f)g + 2 \langle \nabla f, \nabla g \rangle + f(\Delta g). \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 52 / 71

Exercice 19 Q 1

Exercice 19

Question 1

La fonction

$$f : (x, y) \mapsto xy + e^y$$

est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 par opérations sur les fonctions \mathcal{C}^2 . En un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, elle admet pour gradient :

$$\nabla f(x, y) = (\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)) = (y, x + e^y)$$

et pour hessienne :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2 f(x, y) & \partial_{1,2}^2 f(x, y) \\ \partial_{2,1}^2 f(x, y) & \partial_{2,2}^2 f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & e^y \end{pmatrix}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 53 / 71

Exercice 19 Q 1

En particulier :

$$\nabla f(0,0) = (0,1) \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où le développement limité de f à l'ordre 2 en $A = (0,0)$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0,0) + \langle \nabla f(0,0), (x, y) \rangle + \frac{1}{2} q_{(0,0)}(x, y) + o(\|(x, y)\|^2) \\ &= 1 + y + xy + \frac{1}{2} y^2 + o(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

lorsque $(x, y) \rightarrow (0,0)$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 54 / 71

Exercice 19 Q 2

Exercice 19

Question 2

La fonction

$$f : (x, y) \mapsto e^{x^2-1} \cos y$$

est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 par opérations sur les fonctions \mathcal{C}^2 . En un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, elle admet pour gradient :

$$\nabla f(x, y) = (2xe^{x^2-1} \cos y, -e^{x^2-1} \sin y) = e^{x^2-1} (2x \cos y, -\sin y)$$

et pour hessienne :

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x, y) &= \begin{pmatrix} (4x^2 + 2)e^{x^2-1} \cos y & -2xe^{x^2-1} \sin y \\ -2xe^{x^2-1} \sin y & -e^{x^2-1} \cos y \end{pmatrix} \\ &= e^{x^2-1} \begin{pmatrix} 2(2x^2 + 1) \cos y & -2x \sin y \\ -2x \sin y & -\cos y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 55 / 71

Exercice 19 Q 2

En particulier :

$$\nabla f(1,0) = (2,0) \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où le développement limité de f à l'ordre 2 en $A = (1,0)$:

$$\begin{aligned} f(1+h, k) &= f(1,0) + \langle \nabla f(1,0), (h, k) \rangle + \frac{1}{2} q_{(1,0)}(h, k) + o(\|(h, k)\|^2) \\ &= 1 + 2h + 3h^2 - \frac{1}{2} k^2 + o(h^2 + k^2) \end{aligned}$$

lorsque $(h, k) \rightarrow (0,0)$. Ou encore :

$$f(x, y) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 - \frac{1}{2} y^2 + o((x-1)^2 + y^2)$$

lorsque $(x, y) \rightarrow (1,0)$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 56 / 71

Exercice 20 Q 1.a

Exercice 20

Question 1.a

L'ensemble \mathcal{U} est une partie ouverte de \mathbb{R}^2 comme image réciproque, par la fonction $(x, y) \mapsto y$, continue sur \mathbb{R}^2 , de l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 57 / 71

Exercice 20 Q 1.b

Exercice 20

Question 1.b

La fonction F est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{U} par opérations sur les fonctions \mathcal{C}^2 avec, pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f'\left(x + \frac{1}{y}\right) + g'\left(x - \frac{1}{y}\right)$$

ainsi que :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{y^2}f'\left(x + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{y^2}g'\left(x - \frac{1}{y}\right)$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 58 / 71

Exercice 20 Q 1.b

puis :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = f''\left(x + \frac{1}{y}\right) + g''\left(x - \frac{1}{y}\right)$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{2}{y^3}f'\left(x + \frac{1}{y}\right) - \frac{2}{y^3}g'\left(x - \frac{1}{y}\right) \\ &\quad + \frac{1}{y^4}f''\left(x + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{y^4}g''\left(x - \frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

On vérifie alors à partir de ces expressions que F satisfait bien à la relation ci-dessous :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) - y^4 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) - 2y^3 \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 59 / 71

Exercice 20 Q 2.a

Exercice 20

Question 2.a

L'ensemble \mathcal{V} est une partie ouverte de \mathbb{R}^2 comme image réciproque, par la fonction $(s, t) \mapsto s - t$, continue sur \mathbb{R}^2 , de l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 60 / 71

Exercice 20 Q 2.b

Exercice 20

Question 2.b

La fonction G est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{V} par opérations (HP) sur les fonctions \mathcal{C}^2 avec, pour tout $(s, t) \in \mathcal{V}$:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(s, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{s+t}{2}, \frac{2}{s-t}\right) + \frac{2}{(s-t)^2} \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{s+t}{2}, \frac{2}{s-t}\right)$$

puis :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial s \partial t}(s, t) &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{s+t}{2}, \frac{2}{s-t}\right) - \frac{1}{2} \frac{2}{(s-t)^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\left(\frac{s+t}{2}, \frac{2}{s-t}\right) \\ &\quad + \frac{2}{(s-t)^2} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\left(\frac{s+t}{2}, \frac{2}{s-t}\right) - \frac{4}{(s-t)^4} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{s+t}{2}, \frac{2}{s-t}\right) \\ &\quad - \frac{4}{(s-t)^3} \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{s+t}{2}, \frac{2}{s-t}\right). \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 61 / 71

Exercice 20 Q 2.b

En notant

$$\begin{cases} x = \frac{s+t}{2}, \\ y = \frac{2}{s-t}, \end{cases}$$

on a donc :

$$4 \frac{\partial^2 G}{\partial s \partial t}(s, t) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) - y^4 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) - 2y^3 \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$$

par hypothèse.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 62 / 71

Exercice 20 Q 2.c

Exercice 20

Question 2.c

Pour $t \in \mathbb{R}$ donné, la fonction $s \mapsto \frac{\partial G}{\partial t}(s, t)$ présente ainsi une dérivée nulle sur l'intervalle $]t, +\infty[$. Elle y est donc constante : il existe un réel $k(t)$ tel que :

$$\forall s > t, \quad \frac{\partial G}{\partial t}(s, t) = k(t).$$

La fonction $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie est nécessairement de classe \mathcal{C}^1 car :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad k(t) = \frac{\partial G}{\partial t}(t+1, t)$$

avec G de classe \mathcal{C}^2 d'après b..

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 63 / 71

Exercice 20 Q 2.c

En notant g une primitive de la fonction k , il existe de même une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (s, t) \in \mathcal{V}, \quad G(s, t) = f(s) + g(t).$$

Les fonctions f et g ainsi définies sont nécessairement de classe \mathcal{C}^2 .

Enfin, pour $(x, y) \in \mathcal{U}$ et $(s, t) \in \mathcal{V}$,

$$\begin{cases} x = \frac{s+t}{2} \\ y = \frac{2}{s-t} \end{cases} \iff \begin{cases} s+t = 2x \\ s-t = \frac{2}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} s = x + \frac{1}{y} \\ t = x - \frac{1}{y} \end{cases}$$

si bien qu'on a donc :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad F(x, y) = f\left(x + \frac{1}{y}\right) + g\left(x - \frac{1}{y}\right).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 64 / 71

Exercice 21 Q 1.a

Exercice 21

Question 1.a

La fonction partielle $u : t \mapsto f(A + tH)$ est bien définie sur le segment $[0, 1]$ car, pour $t \in [0, 1]$, $\|(A + tH) - A\| = |t| \|H\| \leq \|H\| < r$ si bien que $A + tH \in \mathcal{B}(A, r) \subset \mathcal{U}$.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 65 / 71

Exercice 21 Q 1.b

Exercice 21

Question 1.b

Puisque f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{U} , la fonction partielle $u : t \mapsto f(A + tH)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$ avec :

$$\forall t \in [0, 1], \quad u'(t) = \langle \nabla f(A + tH), H \rangle = \sum_{j=1}^n h_j \partial_j f(A + tH)$$

et :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], \quad u''(t) &= \sum_{j=1}^n h_j \left(\sum_{i=1}^n h_i \partial_i \partial_j f(A + tH) \right) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} h_i h_j \partial_i^2 \partial_j f(A + tH) = q_{A+tH}(H). \end{aligned}$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 66 / 71

Exercice 21 Q 1.c

Exercice 21

Question 1.c

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à u sur le segment $[0, 1]$, on obtient :

$$u(1) = u(0) + u'(0) + \int_0^1 (1-t) u''(t) dt$$

c'est-à-dire :

$$f(A + H) = f(A) + \sum_{j=1}^n \partial_j f(A) h_j + \sum_{1 \leq i, j \leq n} h_i h_j \int_0^1 (1-t) \partial_i^2 \partial_j f(A + tH) dt.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 67 / 71

Exercice 21 Q 2.a

Exercice 21

Question 2.a

En écrivant que $\int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}$, il vient d'après 1.c. :

$$\begin{aligned} f(A + H) - f(A) - \sum_{j=1}^n \partial_j f(A) h_j - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_i^2 \partial_j f(A) h_i h_j &= \\ = \sum_{1 \leq i, j \leq n} h_i h_j \int_0^1 (1-t) \partial_i^2 \partial_j f(A + tH) dt & \\ - \left(\int_0^1 (1-t) dt \right) \sum_{1 \leq i, j \leq n} h_i h_j \partial_i^2 \partial_j f(A) & \\ = \sum_{1 \leq i, j \leq n} h_i h_j \int_0^1 (1-t) (\partial_i^2 \partial_j f(A + tH) - \partial_i^2 \partial_j f(A)) dt. & \end{aligned}$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 68 / 71

Exercice 21 Q 2.b

Exercice 21

Question 2.b

Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, la continuité de la fonction $\partial_i^2 \partial_j f$ au point A assure l'existence d'un réel $\varrho_{i,j} \in]0, r[$ tel que

$$\forall X \in \mathcal{B}(A, \varrho_{i,j}), \quad |\partial_i^2 \partial_j f(X) - \partial_i^2 \partial_j f(A)| \leq \frac{2\varepsilon}{n^2}.$$

Il suffit de considérer le réel $\varrho = \min_{1 \leq i, j \leq n} \varrho_{i,j} > 0$.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 69 / 71

Exercice 21 Q 2.c

Exercice 21

Question 2.c

Pour $H \in \mathcal{B}(0, \varrho)$,

$$\begin{aligned} |f(A + H) - f(A) - \sum_{j=1}^n \partial_j f(A) h_j - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_i^2 \partial_j f(A) h_i h_j| &\leq \\ \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} |h_i h_j \int_0^1 (1-t) (\partial_i^2 \partial_j f(A + tH) - \partial_i^2 \partial_j f(A)) dt| & \\ \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \|H\|^2 \int_0^1 (1-t) |\partial_i^2 \partial_j f(A + tH) - \partial_i^2 \partial_j f(A)| dt & \\ \leq \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{2\varepsilon}{n^2} \int_0^1 (1-t) dt \right) \|H\|^2 = \varepsilon \|H\|^2, & \end{aligned}$$

car $|h_i| \leq \|H\|$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, d'où le résultat.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 70 / 71

Exercice 22

Exercice 22

Étant donné un vecteur $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on considère la fonction partielle $u : t \mapsto f(A + tV)$, de classe \mathcal{C}^2 .

En appliquant le développement limité de f à $H = tV$ lorsque $t \rightarrow 0$, on obtient :

$$u(t) = f(A + tV) = \alpha + t \langle U, V \rangle + \frac{t^2}{2} {}^t V S V + o(t^2), \quad t \rightarrow 0.$$

Par unicité du développement limité pour les fonctions d'une variable, il en ressort que :

- $\alpha = u(0) = f(A)$;
- $\langle U, V \rangle = u'(0) = \partial_V f(A) = \langle \nabla f(A), V \rangle$, formule valable pour tout $V \in \mathbb{R}^n$, d'où il ressort que $U = \nabla f(A)$;
- ${}^t V S V = u''(0) = \partial_V^2 f(A) = q_A(V)$ pour tout $V \in \mathbb{R}^n$, si bien que $S = \nabla^2 f(A)$ par unicité de la matrice symétrique associée à une forme quadratique.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 71 / 71