

Espaces euclidiens

Feuille d'exercices

1 Soient $n \in \mathbb{N}$ et a_0, \dots, a_n des réels deux-à-deux distincts.

★ 1. Montrer que l'application

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{j=0}^n P(a_j)Q(a_j)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose :

$$L_i = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

a. Calculer $L_i(a_j)$ pour $0 \leq i, j \leq n$.

b. En déduire que $\underline{L} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ orthonormale pour le produit scalaire de la question 1.

c. Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

2 Soit E un espace euclidien de dimension n rapporté à une base orthonormale \underline{e} . On considère un endomorphisme f représenté en base \underline{e} par une matrice A telle que $A^2 = A$ et ${}^t A = A$.

Démontrer que f est une projection orthogonale.

3 Soit E un espace euclidien rapporté à une base \underline{e} . On note A la matrice représentative du produit scalaire sur E dans la base \underline{e} . Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = {}^t P P$ et en déduire que A est inversible.

4 Dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ euclidien canonique, déterminer une base orthonormale du sous-espace F engendré par les matrices

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5 Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$ converge.

1. a. Montrer que si f et g sont des éléments de E , alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt$ converge absolument.

b. En déduire que E est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

2. Montrer que

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt$$

définit un produit scalaire sur E .

3. a. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_k : t \mapsto e^{-kt}$ appartient à E .

b. Calculer $\langle f_k, f_l \rangle$ pour tout $k, l \in \mathbb{N}^*$.

4. Déterminer une base orthonormale de $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

6 Pour $\Omega = (\omega_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale, montrer que :

★

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |\omega_{i,j}| \leq n\sqrt{n} \quad \text{puis} \quad \left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} \omega_{i,j} \right| \leq n.$$

7 Soient E un espace euclidien et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

★

1. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

2. En déduire que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

8 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace euclidien E . Montrer que $E = F^\perp \oplus G^\perp$.

9 Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E tel que $f(x)$ est orthogonal à x pour tout $x \in E$.

★

1. Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$. On dit que f est un endomorphisme *antisymétrique*.

Indication. On pourra calculer $\langle f(x+y), x+y \rangle$.

2. Montrer que $\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$.

3. a. Montrer que 0 est la seule valeur propre éventuelle de f .

b. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4. Soit \underline{e} une famille obtenue en réunissant une base orthonormale de $\text{Im } f$ et une base orthonormale de $\text{Ker } f$. Justifier que \underline{e} est une base orthonormale de E et déterminer la forme de la matrice de f dans cette base.

10 Sur l'ensemble $E = \ell^\infty(\mathbb{R})$ des suites réelles bornées, on définit le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par :

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \quad \forall v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \quad \langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n v_n}{2^n}.$$

1. Vérifier que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel pour les lois usuelles et que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

2. Déterminer l'orthogonal du sous-espace F des suites presque nulles (i.e. dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang) de E . Commenter.

3. On considère le sous-espace vectoriel

$$G = \{ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E : \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+3} = u_{n+2} + 2u_{n+1} - u_n \}.$$

a. Déterminer une base de G .

Indication. On pourra rechercher les suites géométriques appartenant à G et considérer l'application $\phi : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G \mapsto (u_0, u_1, u_2)$.

b. En déduire une base orthonormale de G .

11 Soit E un espace euclidien.

♣ 1. Pour tout $a \in E$, on note φ_a la forme linéaire $x \mapsto \langle x, a \rangle$ de E et φ l'application $a \mapsto \varphi_a$ de E dans $\mathbf{L}(E, \mathbb{R})$. Montrer que φ est un isomorphisme.

2. Soit f un endomorphisme de E .

a. Montrer qu'il existe un et un seul endomorphisme f^* de E , appelé l'adjoint de f , tel que :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

b. Comparer les matrices de f et f^* dans une base orthonormale $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ donnée de E .

c. Identifier l'endomorphisme f^{**} .

d. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que F est stable par f si, et seulement si, le sous-espace F^\perp est stable par f^* .

e. Établir les relations :

$$\begin{aligned} \text{Ker } f^* &= (\text{Im } f)^\perp, & \text{Im } f^* &= (\text{Ker } f)^\perp, \\ \text{Ker}(f^* \circ f) &= \text{Ker } f & \text{et} & \quad \text{Im}(f \circ f^*) = \text{Im } f. \end{aligned}$$

12 Soit $n \geq 1$. On munit l'espace vectoriel $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

- ♣
- Vérifier que pour toutes matrices $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
 - Montrer que les sous-espaces $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices respectivement symétriques et antisymétriques sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
 - Déterminer le projeté orthogonal d'une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ sur le sous-espace $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

13 On munit $\mathbb{R}_3[X]$ de son produit scalaire canonique.

- ♣
- Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
 - Déterminer une base orthonormale de F .
 - Déterminer le projeté orthogonal de X sur F .
 - Retrouver ce résultat par une méthode plus simple.

14 Soit E un espace euclidien de dimension n rapporté à une base orthonormale \underline{e} . On considère un vecteur $u \in E$ unitaire et on note U la colonne de ses coordonnées en base \underline{e} . Soient H l'hyperplan normal à u et p la projection orthogonale sur H . Montrer que l'endomorphisme p est représenté en base \underline{e} par la matrice $I_n - U^t U$ en utilisant successivement les trois méthodes suivantes :

- En appliquant une formule du cours ;
- En redémontrant cette formule du cours sur le cas traité ;
- En montrant que l'endomorphisme représenté par $A = I_n - U^t U$ en base \underline{e} est la projection p .

15 Soient E un espace euclidien et $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

♣ 1. On suppose la famille \underline{u} orthonormale. Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \sum_{k=1}^n \langle u_k, x \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

avec égalité lorsque la famille \underline{u} est une base orthonormale de E .

2. On suppose réciproquement que :

$$\forall x \in E, \quad \sum_{k=1}^n \langle u_k, x \rangle^2 = \|x\|^2.$$

a. En considérant l'orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par la famille \underline{u} , montrer que celle-ci est génératrice de E .

b. On suppose dans cette question que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|u_i\| \geq 1$. Montrer que \underline{u} est une base orthonormale de E .

c. On suppose dans cette question que la famille \underline{u} est libre. Montrer que c'est une base orthonormale de E .

Indication. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pourra considérer un vecteur orthogonal à l'hyperplan engendré par la famille $(u_j)_{j \neq i}$ afin de se ramener au cas traité en b..

16 Soient E un espace euclidien rapporté à une base (e_1, \dots, e_n) orthonormale.

Soit p un projecteur orthogonal de E sur une droite D . Montrer que :

$$\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = 1.$$

17 Soient $p \leq n$ deux entiers naturels non nuls. On munit les espaces $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de leurs produits scalaires canoniques et l'on considère une matrice $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit q la projection orthogonale de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur le sous-espace vectoriel $\text{Im } A$.

1. On suppose, dans cette question seulement, que $n = p$ et l'on considère la matrice Q représentative de q en base canonique.

a. Pour $X, Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer que ${}^t X Q Y = {}^t X^t Q Y$ en considérant $\langle X - QX, QY \rangle$. En déduire que Q est symétrique.

b. Que vaut le produit QA ? En déduire que :

$$(\text{tr } A)^2 \leq (\text{rg } A) \text{tr}({}^t AA).$$

2. On revient au cas général $p \leq n$ et l'on suppose que A est de rang p .

a. Montrer que $\text{Ker}({}^t AA) = \text{Ker } A$ et en déduire que A est inversible.

b. Montrer que $Q = A({}^t AA)^{-1} A$ est la matrice représentative de q en base canonique.

18 Soit p un projecteur non nul d'un espace euclidien E .

♣ 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}.$$

2. En déduire que l'ensemble $\left\{ \frac{\|p(x)\|}{\|x\|} \right\}_{x \in E \setminus \{0\}}$ est majoré par $\sqrt{n} \max_{1 \leq k \leq n} \|p(e_k)\|$, où (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de E .

On pose :

$$\|p\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|p(x)\|}{\|x\|}.$$

3. Montrer que $\|p\| \geq 1$.

On souhaite à présent démontrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $\|p\| = 1$ c'est-à-dire, d'après ce qui précède : pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

4. Montrer que la condition énoncée est nécessaire pour que p soit un projecteur orthogonal.

5. Montrer qu'elle est suffisante en utilisant les deux méthodes ci-dessous :

a. en étudiant $\|p(\lambda y + z)\|$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $y \in \text{Ker } p$ et $z \in \text{Im } p$;

b. en calculant $\|x + (p(x) - x)\|^2$ pour $x \in (\text{Ker } p)^\perp$.

19 Dans $E = \mathbb{R}^4$ euclidien canonique, on considère le sous-espace vectoriel F d'équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Décrire géométriquement F puis former une base orthonormale de F^\perp .

2. Déterminer la matrice en base canonique de la projection orthogonale sur F puis de la symétrie orthogonale par rapport à F .

3. Déterminer la distance du vecteur $x = (1, 2, 3, 4)$ au sous-espace F .

20 1. Pour $A \in \mathbb{R}[X]$, justifier que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} A(t)e^{-t} dt$ converge.

2. Justifier que l'application

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_2[X]$.

3. a. Calculer $\langle X^i, X^j \rangle$ pour $0 \leq i, j \leq 2$.

b. Déterminer le projeté orthogonal Π de X^2 sur le sous-espace vectoriel $F = \mathbb{R}_1[X]$.

4. Calculer

$$d = \inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t} dt.$$

21 Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$H = \left\{ M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) : \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j} = 0 \right\}.$$

Calculer

$$\delta = \inf_{M \in H} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2.$$

22 On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (2x - y - 1)^2 + (x + 3)^2 + (x - y - 1)^2.$$

Montrer que f présente un minimum global sur \mathbb{R}^2 , déterminer la valeur de ce minimum ainsi que les points où ce minimum est atteint.

23 **Ajustement affine d'une série statistique double**

★ On se donne $n \geq 2$ points $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ de \mathbb{R}^2 (on parle de nuage de points). On suppose que tous ces points n'ont pas même abscisse, i.e. que x_1, \dots, x_n ne sont pas tous égaux.

Pour $m, p \in \mathbb{R}$, on s'intéresse à la quantité

$$\delta(m, p) = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - p)^2,$$

qui mesure la « distance verticale » du nuage de points à la droite d'équation $y = mx + p$.

1. Justifier l'existence d'une unique droite d'équation $y = mx + p$, appelée **droite de régression** de y en x (ou **droite des moindres carrés** de y en x) dont les coefficients m et p minimisent la fonction

$$\delta(m, p) = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - p)^2.$$

2. *Application.* Déterminer la droite de régression de y en x du nuage constitué des points $A_1 = (1, 2)$, $A_2 = (0, -1)$, $A_3 = (2, 2)$ et $A_4 = (-1, -2)$.

24 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on considère un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

★ 1. a. Justifier que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe un unique polynôme P_k de $\mathbb{R}_k[X]$ qui soit unitaire (i.e. de coefficient de plus haut degré égal à 1) et orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

b. Justifier que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, P_k est de degré k . On pose $P_0 = 1$ et, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Q_k = \frac{1}{\|P_k\|} P_k$.

2. a. Montrer que (Q_0, Q_1, \dots, Q_n) est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Justifier que (Q_0, Q_1, \dots, Q_n) est la base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ obtenue par application du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique.

Dans la suite de l'exercice, on considère que le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}[X]$ est défini par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t)w(t) dt$$

où $a < b$ sont deux réels et $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction (appelée *ponds*) continue à valeurs strictement positives.

3. Justifier que la formule ci-dessus définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

4. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note y_1, \dots, y_r les racines d'ordre impair de Q_k et on définit le polynôme $D = \prod_{i=1}^r (X - y_i)$ (dans le cas où Q_k n'a aucune racine d'ordre impair dans $]a, b[$, on pose $D = 1$).

a. Justifier que $Q_k D$ garde un signe constant sur $[a, b]$.

b. En raisonnant par l'absurde, en déduire que $r = k$.

c. Qu'en déduit-on sur Q_k ?

5. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

a. Justifier l'existence de réels a_0, a_1, \dots, a_{k+1} tels que $XQ_k = \sum_{i=0}^{k+1} a_i Q_i$. Montrer que $a_0 = \dots = a_{k-2} = 0$.

b. En déduire l'existence de trois réels α_k, β_k et γ_k tels que

$$Q_{k+1} = (\alpha_k X + \beta_k) Q_k + \gamma_k Q_{k-1}.$$