

# Lois continues classiques

## Feuille d'exercices

**1** Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**1.** Calculer les probabilités suivantes :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X \leq 1,63) \quad \mathbb{P}(X < 1,63) \quad \mathbb{P}(X \leq -1,41) \\ & \mathbb{P}(X \geq -1,52) \quad \mathbb{P}(1,536 \leq X < 1,624). \end{aligned}$$

**2.** Calculer les seuils  $x$  définis par :

$$\mathbb{P}(X \leq x) = 0,9463 \quad \mathbb{P}(X \leq x) = 0,0537 \quad \mathbb{P}(|X| \leq x) = 0,4844.$$

**2** Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi normale  $\mathcal{N}(7, 4^2)$ .

**1.** Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X < 7) \quad \mathbb{P}(X \leq 12,12) \quad \mathbb{P}(X \leq 8,26) \quad \mathbb{P}(5,25 < X \leq 9,13).$$

**2.** Déterminer les seuils  $x$  définis par :

$$\mathbb{P}(X \leq x) = 0,9162 \quad \mathbb{P}(X > x) = 0,9418 \quad \mathbb{P}(-x + 14 < X < x) = 0,9418.$$

**3** Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi normale  $\mathcal{N}(1, 2)$ . Déterminer une densité de

$$Y_1 = X^2, \quad Y_2 = \frac{1}{1 + X^2} \quad \text{et} \quad Y_3 = \frac{1}{1 - X^2}.$$

**4** Soient deux variables aléatoires indépendantes :  $X$  suivant la loi  $\gamma(\frac{1}{2})$  et  $B$  prenant uniformément ses valeurs dans  $\{-1, 1\}$ . On pose  $Y = \sqrt{X}$  et  $Z = BY$ .

**1.** Déterminer une densité de  $Y$ .

**2. a.** Déterminer une densité de  $Z$ .

*Indication.* On pourra exprimer la fonction de répartition de  $Z$  en considérant le système complet associé à  $B$ .

**b.** Reconnaître la loi de  $Z$  et donner sans calcul son espérance et sa variance.

**5** **1.** En utilisant la loi normale centrée réduite, montrer que  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

**2.** En utilisant une loi normale bien choisie, calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a. } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2-4t-2} dt; \quad \text{b. } \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-2t^2-4t-2} dt; \quad \text{c. } \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-2t^2-4t-2} dt.$$

**3.** Exprimer les intégrales suivantes à l'aide de la fonction de répartition  $\Phi$  de la loi normale centrée réduite puis en donner des valeurs approchées :

$$\text{a. } \int_0^1 e^{-t^2/2} dt; \quad \text{b. } \int_0^2 e^{-2t^2+4t-2} dt; \quad \text{c. } \int_0^{1/2} e^{-4t^2-4t} dt.$$

**6** *Loi du khi-deux*

★ Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ . On appelle loi du  $\chi^2$  à  $r$  degrés de liberté la loi de la variable  $2Z$ , si  $Z$  est une variable aléatoire de loi  $\gamma(\frac{r}{2})$ .

**1.** Déterminer la densité, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire  $X$  suivant la loi du  $\chi^2$  à  $r$  degrés de liberté.

**2. a.** Montrer que :

$$\forall \lambda > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e^\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^\lambda e^{\lambda-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt.$$

**b.** Pour  $\lambda > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère une variable aléatoire  $Y_\lambda$  suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  ainsi qu'une variable aléatoire  $X_{2n}$  suivant la loi du  $\chi^2$  à  $2n$  degrés de liberté. Montrer que  $\mathbb{P}(X_{2n} > 2\lambda) = \mathbb{P}(Y_\lambda < n)$ .

**c.** Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition  $F_6$  d'une variable suivant la loi du  $\chi^2$  à 6 degrés de liberté. Préciser les valeurs de  $F_6(0)$ ,  $F_6(4)$  et  $F_6(8)$ .

**3.** Soient  $X_1, \dots, X_r$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes gaussiennes centrées réduites.

**a.** Déterminer la loi de  $X_1^2$ .

**b.** En déduire la loi de  $X_1^2 + \dots + X_r^2$ .

**c.** Tracer sur un même graphe l'allure des fonctions de répartition de deux variables aléatoires, l'une suivant la loi du  $\chi^2$  à  $r$  degrés de liberté, l'autre la loi du  $\chi^2$  à  $s$  degrés de liberté où  $r < s$ .

**7** **1.** Si  $X$  est une variable aléatoire de loi uniforme sur  $]0, 1]$ , quelle est la loi de  $Y = -\ln X$  ?

**2.** Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $]0, 1]$ .

**a.** Déterminer la loi de la variable  $Z_n = \prod_{i=1}^n X_i$ .

**b.** Calculer  $\mathbb{E}(Z_n)$ .

**8** Des voyageurs arrivent de façon aléatoire dans la salle des pas perdus de la gare de Lyon. Pour tout  $t > 0$ , on suppose que la variable aléatoire  $N_t$ , égale au nombre de voyageurs arrivant entre les instants 0 et  $t$ , suit une loi de Poisson de paramètre  $\alpha t$ , où  $\alpha > 0$  est un paramètre donné.

**1.** On note  $X_1$  l'instant d'arrivée du premier voyageur.

**a.** Déterminer  $\mathbb{P}(X_1 > t)$  pour  $t > 0$  et reconnaître la loi de  $X_1$ .

**b.** Donner sans calcul l'espérance et la variance de  $X_1$ .

**2.** Pour  $n \geq 2$ , on considère la variable aléatoire  $X_n$  égale à l'instant d'arrivée du  $n$ -ième voyageur.

**a.** Montrer que la fonction de répartition  $F_{X_n}$  de  $X_n$  est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_{X_n}(t) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \left( 1 - e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha t)^k}{k!} \right).$$

**b.** En déduire une densité  $f_n$  de  $X_n$ . Reconnaître la loi de  $X_n$ .

**c.** En déduire l'espérance et la variance de  $X_n$ .

**9** À l'instant  $t = 0$ , un piéton se trouve au bord d'une route à sens unique qu'il désire traverser.

On note  $T_1$  la variable aléatoire égale au temps qui s'écoule entre le début de l'expérience et le passage de la première voiture puis, plus généralement, pour tout  $i \geq 2$ ,  $T_i$  la durée entre le passage de la  $i-1$ -ième voiture et de la  $i$ -ième voiture. On suppose que les  $T_i$ ,  $i \geq 1$ , sont mutuellement indépendantes et suivent une même loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . Prudent, le piéton décide de ne traverser à l'instant  $t$  que si la prochaine voiture à passer est éloignée de lui d'une distance supérieure à une certaine distance de sécurité. Le temps nécessaire à un voiture pour parcourir cette distance de sécurité est noté  $a$  (toutes les voitures sont supposées rouler à la même vitesse).

On note  $X$  la variable aléatoire égale à l'instant où le piéton peut traverser la route pour la première fois. On note  $N$  le nombre de voitures qui passeront devant le piéton avant que celui-ci puisse traverser.

On pose  $p = e^{-\lambda a}$  et  $q = 1 - p$ .

1. a. Exprimer les probabilités  $\mathbb{P}(X = 0)$  et  $\mathbb{P}(N = 0)$  en fonction de  $p$ .  
b. Pour  $n \geq 1$ , déterminer  $\mathbb{P}(T_1 \leq a, \dots, T_n \leq a, T_{n+1} > a)$  en fonction de  $p$ . En déduire la loi de  $N$ .  
c. Soit  $n \geq 1$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , déterminer une densité pour la loi de  $T_i$  conditionnellement à l'événement  $[N = n]$ .
2. a. Déterminer l'espérance  $\mathbb{E}(T_i | N = n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .  
b. Calculer l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(X | N = n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .  
c. En déduire l'espérance de  $X$  en fonction de  $a$ .

**10** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite. On pose  $Z = \max(X, Y)$ .

1. Rappeler l'expression d'une densité  $f$  commune à  $X$  et  $Y$ . On note  $\Phi$  la fonction de répartition associée.
2. Déterminer une densité pour la variable aléatoire  $Z$ .
3. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que  $Z$  admet une espérance que l'on calculera.
4. Montrer que  $X^2$  et  $Z^2$  ont même loi. En déduire la variance de  $Z$ .

**11** Une puce se déplace dans  $\mathbb{R}^3$  rapporté à un repère  $(O; e_1, e_2, e_3)$ . À l'instant 0, elle se trouve à l'origine  $O = (0, 0, 0)$ . À tout instant  $n \in \mathbb{N}^*$ , elle effectue un déplacement  $D_n = (D_{n,1}, D_{n,2}, D_{n,3})$ . On suppose que les trois variables aléatoires  $D_{n,1}$ ,  $D_{n,2}$  et  $D_{n,3}$  sont indépendantes et suivent la même loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On suppose de plus que tous les déplacements sont indépendants.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_{n,i} = \sum_{k=1}^n D_{k,i}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$  et  $S_n = (S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3})$ . On s'intéresse à l'événement  $A_n = [S_n \in [-1, 1]^3]$ .

1. a. Déterminer la loi de  $S_{n,1}$ .  
b. Exprimer la probabilité  $p_n = \mathbb{P}(|S_{n,1}| \leq 1)$  à l'aide de la fonction de répartition  $\Phi$  de la loi normale centrée réduite. Grâce à un développement limité de  $\Phi$ , donner

un équivalent de  $p_n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

c. Déterminer un équivalent de  $\mathbb{P}(A_n)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

2. a. Montrer que :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{m+n} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{m+n} \mathbb{P}(A_k).$$

b. En déduire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right).$$

c. Déterminer

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k\right).$$

3. Qu'en déduire concernant le déplacement de la puce ?

**12** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad U_n = \min(X_1, \dots, X_n).$$

1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que  $U_n$  suit une loi exponentielle et en préciser le paramètre.
2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , donner une densité de  $S_n$  puis montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}(S_n > x) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

3. On considère une variable aléatoire  $N$ , définie sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  que les  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , et suivant une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On suppose les variables  $N$  et  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , mutuellement indépendantes.

On considère les variables aléatoires  $S = S_N$  et  $U = U_N$  définies, pour tout  $\omega \in \Omega$ , par :

$$S(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega) \quad \text{et} \quad U(\omega) = U_{N(\omega)}(\omega).$$

- a. Démontrer que  $U$  est une variable à densité dont on précisera une densité.
- b. Déterminer la fonction de répartition de  $S$ . En déduire la loi de  $S$  et montrer que  $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(N)$ .