Travaux dirigés

Lois continues classiques

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2018/2019

Exercice 1

Question 1

Par lecture directe dans la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on obtient :

$$\mathbb{P}(X \leqslant 1{,}63) = \Phi(1{,}63) \simeq 0{,}9484.$$

Comme X est à densité, on en déduit que :

$$\mathbb{P}(X < 1{,}63) = \mathbb{P}(X \leqslant 1{,}63) \simeq 0{,}9484.$$

Puis :

$$\mathbb{P}(X \leqslant -1{,}41) = \Phi(-1{,}41) = 1 - \Phi(1{,}41) \simeq 1 - 0{,}9207 \simeq 0{,}0793.$$

Sur le même principe,

$$\mathbb{P}(X \geqslant -1{,}52) = 1 - \mathbb{P}(X < -1{,}52) = 1 - \Phi(-1{,}52) = \Phi(1{,}52) \simeq 0{,}9357.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1{,}536 \leqslant X < 1{,}624) &= \mathbb{P}(X < 1{,}624) - \mathbb{P}(X \leqslant 1{,}536)\\ &= \Phi(1{,}624) - \Phi(1{,}536).\end{aligned}$$

Pour calculer chacune des valeurs de Φ, on utilise une interpolation linéaire (on approche Φ par une fonction affine sur le segment $[1{,}62; 1{,}63]$) :

$$\begin{aligned}\Phi(1{,}624) &= \Phi\big(1{,}62 + 0{,}4 \cdot (1{,}63 - 1{,}62)\big)\\ &\simeq \Phi(1{,}62) + 0{,}4 \cdot \big(\Phi(1{,}63) - \Phi(1{,}62)\big)\\ &\simeq 0{,}9474 + 0{,}4 \cdot (0{,}9484 - 0{,}9474) \simeq 0{,}9478.\end{aligned}$$

On obtient de même :

$$\begin{aligned}\Phi(1{,}536) &= \Phi\big(1{,}53 + 0{,}6 \cdot (1{,}54 - 1{,}53)\big)\\ &\simeq \Phi(1{,}53) + 0{,}6 \cdot \big(\Phi(1{,}54) - \Phi(1{,}53)\big) \simeq 0{,}9377\end{aligned}$$

d'où finalement :

$$\mathbb{P}(1{,}536 \leqslant X < 1{,}624) \simeq 0{,}9478 - 0{,}9377 \simeq 0{,}0101.$$

Exercice 1

Question 2

Toujours par lecture dans la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on obtient :

$$\mathbb{P}(X \leqslant 1{,}61) = \Phi(1{,}61) \simeq 0{,}9463.$$

Sur le même principe,

$$0{,}0537 = 1 - 0{,}9463 = 1 - \Phi(1{,}61) = \Phi(-1{,}61) = \mathbb{P}(X \leqslant -1{,}61).$$

Enfin, par interpolation linéaire,

$$\begin{aligned}0{,}4844 = 1 - 0{,}5156 &= 1 - \big[\Phi(0{,}03) + 0{,}9 \cdot \big(\Phi(0{,}04) - \Phi(0{,}03)\big)\big]\\ &\simeq 1 - \Phi(0{,}03 + 0{,}9 \cdot (0{,}04 - 0{,}03)) \simeq 1 - \Phi(0,039)\\ &\simeq \Phi(-0{,}039) \simeq \mathbb{P}(X \leqslant -0{,}039).\end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\mathbb{P}(|X| \leqslant x) = \mathbb{P}(-x \leqslant X \leqslant x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(|X| \leqslant x) = 0{,}4844 \iff \Phi(x) = \frac{1 + 0{,}4844}{2} = 0{,}7422$$

si bien que $\mathbb{P}(|X| \leqslant 0{,}65) \simeq 0{,}4844$.

Exercice 2

Question 1

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(7, 4^2)$, alors sa transformée affine $Y = \frac{X-7}{4}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Pour les calculs de probabilités demandés, on exprime l'événement en fonction de Y et on procède ensuite comme dans l'exercice 1.

Par exemple,

$$\mathbb{P}(X < 7) = \mathbb{P}(Y < 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

De même,

$$\mathbb{P}(X \leqslant 12{,}12) = \mathbb{P}(Y \leqslant 1{,}28) = \Phi(1{,}28) \simeq 0{,}8997.$$

Par approximation linéaire,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leqslant 8{,}26) &= \mathbb{P}(Y < 0{,}315) = \Phi(0{,}315)\\ &\simeq \Phi(0{,}31) + 0{,}5 \cdot \big(\Phi(0{,}32) - \Phi(0{,}31)\big) \simeq 0{,}6236.\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(5{,}25 < X \leqslant 9{,}13) &= \mathbb{P}(-0{,}4375 < Y \leqslant 0{,}5325)\\ &= \mathbb{P}(Y \leqslant 0{,}5325) - \mathbb{P}(Y \leqslant -0{,}4375)\\ &= \Phi(0{,}5325) - \Phi(-0{,}4375) = \Phi(0{,}5325) - 1 + \Phi(0{,}4375)\end{aligned}$$

où, par interpolation linéaire,

$$\Phi(0{,}5325) \simeq \Phi(0{,}53) + 0{,}25 \cdot \big(\Phi(0{,}54) - \Phi(0{,}53)\big) \simeq 0{,}7028$$

et

$$\Phi(0{,}4375) \simeq \Phi(0{,}43) + 0{,}75 \cdot \big(\Phi(0{,}44) - \Phi(0{,}43)\big) \simeq 0{,}6691$$

si bien que

$$\mathbb{P}(0{,}5325 < X \leqslant 9{,}13) \simeq 0{,}3719.$$

Exercice 2

Question 2

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}\Big(Y \leqslant \frac{x-7}{4}\Big) = \Phi\Big(\frac{x-7}{4}\Big).$$

Pour avoir $\mathbb{P}(X \leqslant x) \simeq 0{,}0162$, il suffit donc de prendre x tel que $\frac{x-7}{4} = 1{,}38$ c'est-à-dire $x = 12{,}52$. De même,

$$\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant x) = 1 - \Phi\Big(\frac{x-7}{4}\Big) = \Phi\Big(\frac{7-x}{4}\Big)$$

et l'on aura donc $\mathbb{P}(X > x) \simeq 0{,}9418$ pour x tel que $\frac{7-x}{4} = 1{,}57$ c'est-à-dire $x = 0{,}72$.

On a, pour $x > 7$,

$$\mathbb{P}(-x+14 < X < x) = \mathbb{P}\Big(-\frac{x-7}{4} < Y < \frac{x-7}{4}\Big) = 2\Phi\Big(\frac{x-7}{4}\Big) - 1.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(-x+14 < X < x) \simeq 0{,}9418 \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi\Big(\frac{x-7}{4}\Big) \simeq 0{,}9709.$$

Puisque $\Phi(1{,}89) \simeq 0{,}9706$ et $\Phi(1{,}90) \simeq 0{,}9713$, il suffit par interpolation linéaire de prendre x tel que

$$\frac{x-7}{4} \simeq 1{,}89 + \frac{3}{7}\cdot(1{,}90 - 1{,}89)$$

c'est-à-dire $x \simeq 14{,}58$.

Exercice 4

Question 1

La variable X admet pour densité

$$f_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}\mathbf{e}^{-x} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\mathbf{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Puisque X est presque sûrement positive, la variable $Y = \sqrt{X}$ est bien définie et $\mathbb{P}(Y \leqslant y) = 0$ pour $y < 0$. Pour $y > 0$:

$$\mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(\sqrt{X} \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant y^2) = F_X(y^2).$$

La fonction

$$F_Y : y \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ F_X(y^2) & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}$$

est donc continue sur $\mathbb{R}$ (même en 0 car $F_X(0) = 0$ étant donné que X est presque sûrement positive) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (donc sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points). Ainsi la variable Y est à densité donnée par

$$f_Y : y \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 2yf_X(y^2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathbf{e}^{-y^2} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leqslant 0 \end{cases}.$$

Exercice 4

Question 2.a

Pour $z \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}_{[B=1]}(Z \leqslant z) = \mathbb{P}_{[B=1]}(BY \leqslant z) = \mathbb{P}_{[B=1]}(Y \leqslant z)$$

d'où, puisque B et Y sont indépendantes,

$$\mathbb{P}_{[B=1]}(Z \leqslant z) = \mathbb{P}(Y \leqslant z) = F_Y(z)$$

et, de même, sachant Y à densité :

$$\mathbb{P}_{[B=-1]}(Z \leqslant z) = \mathbb{P}_{[B=-1]}(-Y \leqslant z) = \mathbb{P}(Y \geqslant -z) = 1 - F_Y(-z).$$

En appliquant la formule des probabilités totales au SCE $\big\{[B=-1],[B=1]\big\}$, on obtient donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \leqslant z) &= \mathbb{P}(B=1)\,\mathbb{P}_{[B=1]}(Z \leqslant z) + \mathbb{P}(B=-1)\,\mathbb{P}_{[B=-1]}(Z \leqslant z) \\ &= \frac{1}{2}\big(1 + F_Y(z) - F_Y(-z)\big).\end{aligned}$$

La fonction F_Y étant continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, il en va de même de F_Z si bien que la variable Z est à densité donnée par

$$f_Z : z \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{2}\big(f_Y(z) + f_Y(-z)\big) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathbf{e}^{-z^2}.$$

Exercice 4

Question 2.b

On a :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad f_Z(z) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{z^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\Big).$$

On reconnaît la densité de la loi $\mathcal{N}\big(0, (\frac{1}{\sqrt{2}})^2\big)$. Par théorème, Z admet donc espérance et variance données par :

$$\mathbb{E}(Z) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Z) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 5

Question 1

Par définition,

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u \longmapsto t = u^2/2$, de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant de $]0,+\infty[$ sur lui-même, donne :

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, qui a donc pour densité la fonction

$$f_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{e}^{-x^2/2}.$$

On a donc :

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = 2\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

par parité de f_X et sachant que f_X est une densité de probabilité.

Exercice 5

Question 2.a

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{e}^{-2x^2-4x-2} = \mathbf{e}^{-2(x+1)^2} = \exp\Big(-\frac{(x+1)^2}{2(\frac{1}{2})^2}\Big),$$

ce qui invite à introduire une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{N}\big(-1, (\frac{1}{2})^2\big)$. Une telle variable admet pour densité

$$f_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{(x+1)^2}{2(\frac{1}{2})^2}\Big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathbf{e}^{-2x^2-4x-2}.$$

On en déduit la convergence et la valeur de l'intégrale

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}^{-2t^2-4t-2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

car f_X est une densité.

Exercice 5

Question 2.b

Sur le même principe,

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathbf{e}^{-2t^2-4t-2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

converge puisque X admet une espérance et vaut

$$I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathbb{E}(X) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 5

Question 2.c

De même,

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathbf{e}^{-2t^2-4t-2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

converge puisque X admet une variance et vaut

$$I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathbb{E}(X^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2\big) = \frac{5\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}.$$

Exercice 5

Question 3.a

Soit X_1 une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$, ayant donc pour densité

$$f_{X_1} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{e}^{-x^2/2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^1 \mathbf{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}\int_0^1 f_{X_1}(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}\,\mathbb{P}(0 \leqslant X_1 \leqslant 1) \\ &= \sqrt{2\pi}\big(\mathbb{P}(X_1 \leqslant 1) - \mathbb{P}(X_1 \leqslant 0)\big) = \sqrt{2\pi}\big(\Phi(1) - \Phi(0)\big) \end{aligned}$$

où $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ et, par lecture dans la table de la loi normale centrée réduite, $\Phi(1) \simeq 0{,}8413$.
Avec $\sqrt{2\pi} \simeq 2{,}5066$, on en déduit une valeur approchée de $J_1 \simeq 0{,}8555$.

Exercice 5

Question 3.b

Soit X_2 une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}\big(1, (\frac{1}{2})^2\big)$, de densité

$$f_{X_2} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{(x-1)^2}{2(\frac{1}{2})^2}\Big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathbf{e}^{-2x^2+4x-2}.$$

En introduisant $Y_2 = \frac{X_2 - 1}{1/2}$, transformée affine de X_2 qui suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a :

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^2 \mathbf{e}^{-2t^2+4t-2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 f_{X_2}(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathbb{P}(0 \leqslant X_2 \leqslant 2) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathbb{P}(-2 \leqslant Y_2 \leqslant 2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(\Phi(2) - \Phi(-2)\big) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(2\Phi(2) - 1\big) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}}(2 \cdot 0{,}9772 - 1) \simeq 1{,}1962. \end{aligned}$$

Exercice 5

Question 3.c

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{e}^{-4x^2-4x} = \exp\Big(-4\Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 + 1\Big) = \mathbf{e}\exp\Big(-\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{2(\frac{1}{2\sqrt{2}})^2}\Big),$$

ce qui conduit à introduire une variable aléatoire X_3 de loi $\mathcal{N}\big(-\frac{1}{2}, (\frac{1}{2\sqrt{2}})^2\big)$, de densité

$$f_{X_3} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{2(\frac{1}{2\sqrt{2}})^2}\Big) = \mathbf{e}^{-1}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathbf{e}^{-4x^2-4x}.$$

En introduisant $Y_3 = \frac{X_3 + \frac{1}{2}}{1/(2\sqrt{2})}$, transformée affine de X_3 qui suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a :

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_0^{1/2} \mathbf{e}^{-4t^2-4t}\,\mathrm{d}t = \mathbf{e}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{1/2} f_{X_3}(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{e}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathbb{P}\Big(0 \leqslant X_3 \leqslant \frac{1}{2}\Big) \\ &= \mathbf{e}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathbb{P}\Big(\sqrt{2} \leqslant Y_3 \leqslant 2\sqrt{2}\Big) = \mathbf{e}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\big(\Phi(2\sqrt{2}) - \Phi(\sqrt{2})\big). \end{aligned}$$

Par interpolation linéaire, on obtient :

$$\Phi(\sqrt{2}) \simeq \Phi(1{,}414) \simeq \Phi(1{,}41) + 0{,}4 \cdot \big(\Phi(1{,}42) - \Phi(1{,}41)\big) \simeq 0{,}9213$$

et l'on peut considérer (vu la proximité des valeurs de $\Phi(2{,}82)$ et $\Phi(2{,}83)$) que

$$\Phi(2\sqrt{2}) \simeq \Phi(2{,}828) \simeq \Phi(2{,}83) \simeq 0{,}9977.$$

On obtient ainsi :

$$J_3 \simeq 0{,}1840.$$

Exercice 6

Question 1

Par définition, la variable $Z = \frac{X}{2}$ admet pour densité

$$f_Z : z \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \frac{z^{r/2-1}}{\Gamma(\frac{r}{2})}\mathbf{e}^{-z} & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{si } z \leqslant 0 \end{cases}.$$

Dans ces conditions, $X = 2Z$ admet pour densité

$$f_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{2}f_Z\Big(\frac{x}{2}\Big) = \begin{cases} \frac{x^{r/2-1}}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}}\mathbf{e}^{-x/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Par théorème, Z admet une espérance et une variance égales à :

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{r}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Z) = \frac{r}{2}.$$

Il en va donc de même de $X = 2Z$:

$$\mathbb{E}(X) = 2\,\mathbb{E}(Z) = r \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 2^2\,\mathbb{V}(Z) = 2r.$$

Exercice 6

Question 2.a

La formule de Taylor avec reste intégral s'applique à une fonction f de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle $[a,b]$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Appliquée à la fonction exp sur le segment $[0,\lambda]$, elle s'écrit :

$$\mathbf{e}^{\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\lambda^k + \int_0^{\lambda}\frac{(\lambda-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = \lambda - t$ dans l'intégrale donne alors :

$$\mathbf{e}^{\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^{\lambda}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{e}^{\lambda-u}\,\mathrm{d}u.$$

Exercice 6

Question 2.b

D'après la question **a.**, la variable X_{2n} a pour densité

$$f_{X_{2n}} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}\mathbf{e}^{-x/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Par suite :

$$\mathbb{P}(X_{2n} > 2\lambda) = 1 - \int_0^{2\lambda} f_{X_{2n}}(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \int_0^{2\lambda} \frac{1}{2(n-1)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n-1}\mathbf{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t.$$

Par changement de variable $u = t/2$ dans l'intégrale, on en déduit d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{2n} > 2\lambda) &= 1 - \int_0^{\lambda} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &= \mathbf{e}^{-\lambda}\left(\mathbf{e}^{\lambda} - \int_0^{\lambda} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{e}^{\lambda-u}\,\mathrm{d}u\right) \\ &= \mathbf{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}(Y_\lambda < n).\end{aligned}$$

Exercice 6

Question 2.c

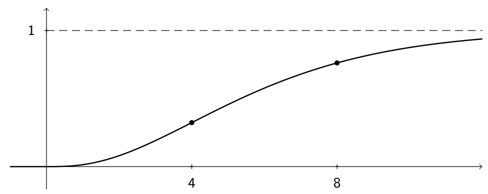
On a tout d'abord $F_6(0) = 0$ car X_3 prend presque sûrement des valeurs positives. Puis la question précédente donne les valeurs approchées :

$$F_6(4) = 1 - \mathbb{P}(X_6 > 4) = 1 - \mathbb{P}(Y_2 < 3) = 1 - \mathbf{e}^{-2}\sum_{k=0}^{2}\frac{2^k}{k!} \simeq 0{,}3233$$

ainsi que

$$F_6(8) = 1 - \mathbb{P}(X_6 > 8) = 1 - \mathbb{P}(Y_4 < 3) = 1 - \mathbf{e}^{-4}\sum_{k=0}^{2}\frac{4^k}{k!} \simeq 0{,}7619$$

En tant que fonction de répartition, la fonction F_6 est croissante et son graphe présente les asymptotes horizontales $y = 0$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$. La tangente à l'origine est horizontale car $F_6'(0) = 0$. Les valeurs de $F_6(0)$, $F_6(4)$ et $F_6(8)$ permettent de situer le graphe.



Exercice 6

Question 3.a

D'après un calcul effectué dans l'exercice 10 question **4.**, la variable X^2 admet pour fonction de répartition

$$F_{X^2} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Cette fonction F_{X^2} est continue sur $\mathbb{R}$ (même en 0) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ si bien que X^2 est une variable à densité donnée par :

$$f_{X^2} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}}f_X(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\mathbf{e}^{-x/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

On reconnaît la densité de la loi $\chi^2(1)$.

Exercice 6

Question 3.b

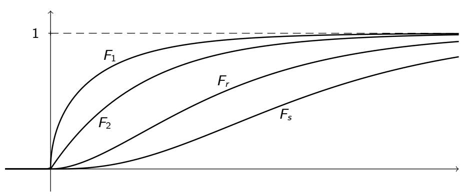
Les variables $X_1, \ldots, X_n$ étant mutuellement indépendantes, il en va de même des variables $\frac{1}{2}X_1^2, \ldots, \frac{1}{2}X_n^2$ qui suivent toutes une loi $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ d'après la question précédente.
Par théorème, leur somme $\frac{1}{2}(X_1^2 + \cdots + X_r^2)$ suit dans ces conditions la loi $\gamma\left(\frac{r}{2}\right)$, ce qui signifie que la variable $X_1^2 + \cdots + X_r^2$ suit la loi $\chi^2(r)$.

Exercice 6

Question 3.c

Soient F_r et F_s les fonctions de répartition des lois $\chi^2(r)$ et $\chi^2(s)$.
Puisque $X_1^2 + \cdots + X_r^2 \leqslant X_1^2 + \cdots + X_s^2$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_s(t) = \mathbb{P}(X_1^2 + \cdots + X_s^2 \leqslant t) \leqslant \mathbb{P}(X_1^2 + \cdots + X_r^2 \leqslant t) = F_r(t).$$



On notera que le graphe de F_1 présente une demi-tangente verticale à l'origine, celui de F_2 une demi-tangente oblique et les autres une tangente horizontale.

Exercice 7

Question 1

On rappelle que X admet pour fonction de répartition

$$F_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}.$$

On observe tout d'abord que Y est bien définie (et presque sûrement positive).
Pour $y \in \mathbb{R}$, sachant X à densité,

$$\mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(-\ln X \leqslant y) = \mathbb{P}(X \geqslant \mathbf{e}^{-y}) = 1 - F_X(\mathbf{e}^{-y}).$$

Ainsi Y a pour fonction de répartition

$$F_Y : y \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - \mathbf{e}^{-y} & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}$$

donc suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

Exercice 7

Question 2.a

Les variables $Y_i = -\ln X_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont indépendantes et suivent toutes, d'après la question **1.**, la loi exponentielle $\mathcal{E}(1) = \gamma(1)$. Par théorème, leur somme $Y_1 + \cdots + Y_n = -\ln Z_n = T_n$ suit alors la loi $\gamma(n)$, i.e. admet pour densité

$$g_n : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

La loi de $Z_n = \mathrm{e}^{-T_n}$ s'en déduit : puisque $Z_n > 0$, on a $\mathbb{P}(Z_n \leqslant z) = 0$ pour $z \leqslant 0$, alors que pour $z > 0$,

$$\mathbb{P}(Z_n \leqslant z) = \mathbb{P}(T_n \geqslant -\ln z) = 1 - F_{T_n}(-\ln z).$$

La variable Z_n admet donc pour fonction de répartition

$$F_{Z_n} : z \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z \leqslant 0 \\ 1 - F_{T_n}(-\ln z) & \text{si } z > 0 \end{cases}.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (même en 0 car $\lim_{+\infty} F_{T_n} = 1$) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. La variable Z_n est donc à densité

$$f_n : z \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{z} g_n(-\ln z) & \text{si } z > 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(-\ln z)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 7

Question 2.b

Les variables $X_1, \ldots, X_n$ étant indépendantes et admettant chacune une espérance, leur produit $Z_n = X_1 \cdots X_n$ admet par théorème une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1) \cdots \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2^n}.$$

Remarque. Le résultat peut être établi par un calcul direct. D'après le théorème de transfert, $\mathbb{E}(Z_n)$ existe car l'intégrale ci-dessous converge absolument par changement de variable affine $u = 2t$ puis comparaison aux intégrales Γ :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-T_n}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2(n-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{2^{n-1}}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2^n(n-1)!}\Gamma(n) = \frac{1}{2^n}.$$

Exercice 9

Question 1.a

L'événement $[X = 0]$ est réalisé si, et seulement si, le piéton peut traverser avant le passage de la première voiture c'est-à-dire si, et seulement si, la première voiture passe après un temps a. Ainsi $[X = 0] = [T_1 > a]$ et, puisque T_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ,

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(T_1 > a) = 1 - F_{T_1}(a) = \mathrm{e}^{-\lambda a} = p.$$

De même l'événement $[N = 0]$ est réalisé si, et seulement si, le piéton peut traverser avant le passage de la première voiture d'où $[N = 0] = [X = 0]$ et

$$\mathbb{P}(N = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = p.$$

Exercice 9

Question 1.b

Par indépendance mutuelle des variables $T_1, \ldots, T_n, T_{n+1}$, il vient :

$$\mathbb{P}(T_1 \leqslant a, \ldots, T_n \leqslant a, T_{n+1} > a) = \mathbb{P}(T_1 \leqslant a) \cdots \mathbb{P}(T_n \leqslant a)\,\mathbb{P}(T_{n+1} > a) = q^n p.$$

Concernant la variable aléatoire N, elle prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ (donc est discrète) et, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, l'événement $[N = n]$ est réalisé si, et seulement si, les n premières voitures se succèdent à des intervalles de temps inférieurs à a alors que la $n+1$-ième suit la n-ième d'un intervalle de temps supérieur à a. En d'autres termes,

$$[N = n] = [T_1 \leqslant a] \cap \cdots \cap [T_n \leqslant a] \cap [T_{n+1} > a] \qquad (*)$$

d'où

$$\mathbb{P}(N = n) = q^n p.$$

Ainsi la variable aléatoire N suit une loi géométrique décalée.

Exercice 9

Question 1.c

On détermine la fonction de répartition de la variable T_i pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}_{[N=n]}$. Pour $t \in]0, a[$, en exprimant $[N = n]$ sous la forme $(*)$, on obtient

$$\mathbb{P}_{[N=n]}(T_i \leqslant t) = \frac{\mathbb{P}([N = n] \cap [T_i \leqslant t])}{\mathbb{P}(N = n)} = \frac{\mathbb{P}(T_i \leqslant t)}{\mathbb{P}(T_i \leqslant a)} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}}$$

par indépendance des variables $T_1, \ldots, T_{n+1}$. Finalement,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}_{[N=n]}(T_i \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda a}} & \text{si } 0 < t < a \\ 1 & \text{si } t \geqslant a \end{cases}.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (même en 0 et en a) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, a\}$ donc, pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}_{[N=n]}$, la variable aléatoire T_i est à densité donnée par

$$f_n : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda a}} & \text{si } 0 < t < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 9

Question 1.b

Pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}_{[N=n]}$, la variable T_i est presque sûrement bornée car à valeurs dans $[0, a]$. Elle admet donc une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}\,(T_i \,|\, N = n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1 - (1 + \lambda a)\mathrm{e}^{-\lambda a}}{\lambda(1 - \mathrm{e}^{-\lambda a})}.$$

Exercice 9

Question 2.b

Pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}_{[N=n]}$, on a presque sûrement $X = T_1 + \cdots + T_n$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,(X \,|\, N = n) &= \mathbb{E}\,(T_1 + \cdots + T_n \,|\, N = n) \\ &= \mathbb{E}\,(T_1 \,|\, N = n) + \cdots + \mathbb{E}\,(T_n \,|\, N = n) \\ &= n\frac{1 - (1 + \lambda a)\mathrm{e}^{-\lambda a}}{\lambda(1 - \mathrm{e}^{-\lambda a})}. \end{aligned}$$

Exercice 9

Question 2.c

En *admettant* que la formule de l'espérance totale s'applique dans cette situation (la variable X n'est pas discrète mais la série de droite converge absolument) :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)\,\mathbb{E}(X \,|\, N = n) = \frac{1 - (1 + \lambda a)\mathrm{e}^{-\lambda a}}{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda a}}.$$

Étudier les limites de cette expression lorsque $a \to 0$, $a \to +\infty$, $\lambda \to +\infty$, $\lambda \to 0$; est-ce cohérent ?

Exercice 10

Question 1

Par définition, X a pour densité

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Cette fonction étant continue, la fonction

$$\Phi : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10

Question 2

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a par indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leqslant x) &= \mathbb{P}\big(\max(X, Y) \leqslant x\big) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant x, Y \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant x)\,\mathbb{P}(Y \leqslant x) = \Phi(x)^2. \end{aligned}$$

La fonction de répartition de Z est ainsi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et la variable Z à densité donnée par

$$f_Z : x \in \mathbb{R} \longmapsto 2f(x)\Phi(x).$$

Exercice 10

Question 3

La variable Z admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. Or, par intégration par parties :

$$\int t f_Z(t)\,\mathrm{d}t = -2f(t)\Phi(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Phi(\sqrt{2} \cdot t) + k.$$

La primitive G obtenue pour $k = 0$ admet des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$ si bien que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t)\,\mathrm{d}t$ converge avec :

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} G(x) - \lim_{x \to -\infty} G(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Exercice 10

Question 4

Les variables aléatoires X^2 et Z^2 ont même fonction de répartition donnée par

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Comme la fonction de répartition caractérise la loi, X^2 et Z^2 ont donc même loi. On a donc :

$$\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 1$$

d'où

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = 1 - \frac{1}{\pi}.$$