

Produits scalaires et orthogonalité

Feuille d'exercices

1 1. Justifier que l'application

$\varphi : ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto 4x_1x_2 - x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$
est une forme bilinéaire sur \mathbb{R}^2 , préciser si elle est symétrique, positive, définie-positive puis déterminer sa matrice en base canonique et, en proposant deux méthodes, dans la base formée par les vecteurs $e_1 = (1, 1)$ et $e_2 = (1, 2)$.

2. Même question dans \mathbb{R}^3 avec l'application

$$\psi : ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \mapsto \begin{aligned} &x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 5y_1y_2 \\ &+ 2y_1z_2 + 2y_2z_1 + z_1z_2 \end{aligned}$$

et les vecteurs $e_1 = (0, 1, 1)$, $e_2 = (2, 0, 1)$ et $e_3 = (3, 0, 1)$.

2 Soit φ la forme bilinéaire canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Justifier que $X \mapsto \sqrt{\varphi(X, X)}$ définit une norme euclidienne sur $\mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

3 Pour $n \geq 2$ donné, on considère l'ensemble E des polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $P(0) = P(1) = 0$. Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall P, Q \in E, \quad \varphi(P, Q) = - \int_0^1 P(x)Q''(x) dx.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.

2. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E . Expliciter la norme euclidienne associée.

4 Soient E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $f : E \rightarrow E$ une application.

1. Montrer que si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle,$$

alors f est un endomorphisme de E .

2. En déduire que si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|f(y) - f(x)\| = \|y - x\|,$$

alors f est un endomorphisme affine de E : il existe $y_0 \in E$ et $\varphi \in \mathbf{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) = y_0 + \varphi(x)$.

5 Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Montrer que :

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{i} \right)^2 \leq \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

2. Montrer plus généralement que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad n \leq \sum_{i=1}^n \sqrt[k]{i} \leq n \cdot \sqrt[k]{\frac{n+1}{2}}.$$

6 Montrer que si $x, y, z \in \mathbb{R}$ sont tels que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$, alors $(x + y + z)^2 \leq \frac{11}{6}$.

7 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, déterminer les n -uplets (x_1, \dots, x_n) de réels tels que

$$x_1 + \dots + x_n = x_1^2 + \dots + x_n^2 = n.$$

8 Montrer que :

$$\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad |\text{tr } A| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2}$$

et étudier le cas d'égalité.

9 Montrer que pour toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on a :

$$\left| \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2} dt \right| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\int_0^1 \frac{f(t)^2}{1+t^2} dt}$$

et

$$\left| \int_0^1 \frac{\sqrt{t}f(t)}{1+t^2} dt \right| \leq \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{2} \sqrt{\int_0^1 \frac{f(t)^2}{1+t^2} dt}.$$

Étudier les cas d'égalité.

10 Soient $a < b$ réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(a) = 0$. Montrer que :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x)^2 \leq \left(\int_a^x |f'(t)| dt \right)^2$$

et en déduire que :

$$\int_a^b f(t)^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'(t)^2 dt.$$

11 Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t)g(t) \geq 1$. Montrer que :

$$\left(\int_0^1 f(t) dt \right) \left(\int_0^1 g(t) dt \right) \geq 1.$$

12 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* admettant une espérance. Montrer que :

$$\frac{1}{\mathbb{E}(X)} \leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right).$$

13 Pour $\alpha > 0$ donné, on considère la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient générique

$$a_{i,j} = \frac{e^{(i+j)\alpha} - 1}{i+j}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

1. Montrer que :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^t X A X = \alpha \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n e^{k\alpha t} x_k \right)^2 dt$$

et en déduire que la matrice A est symétrique définie positive.

2. En utilisant la formule précédente, montrer que :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^t X A X \leq \frac{e^{2n\alpha} - 1}{2} {}^t X X.$$

14 Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

★ Montrer que pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t X A^2 X \leq 0$ et en déduire que les valeurs propres de A^2 sont négatives ou nulles.

15 Soit $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Ker } A = \text{Ker } {}^t A A$ et en déduire que $\text{rg } A = \text{rg } {}^t A A$.

★

16 Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère une famille (e_1, \dots, e_n) de vecteurs unitaires de E telle que $\|e_i - e_j\| = 1$ pour tous $i \neq j$.

Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une base de E .

17 On munit $E = \mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur unitaire.

1. Montrer que $f : x \in E \mapsto x + a \langle u, x \rangle u$ est un endomorphisme de E .

2. Déterminer les éléments propres de f et décider si cet endomorphisme est diagonalisable.

18 Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 muni de son produit scalaire canonique, on considère les vecteurs

$$e_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1) \quad e_3 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1).$$

1. Démontrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est orthonormale.

2. Déterminer les vecteurs e_4 tels que la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) soit une base orthonormale de \mathbb{R}^4 .

19 Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire canonique, déterminer une base orthogonale de l'orthogonal du sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(1 + X - X^3)$.

20 Soient trois vecteurs de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$U_1 = {}^t(1 \ 1 \ 0), \quad U_2 = {}^t(-1 \ 0 \ 1) \quad \text{et} \quad U_3 = {}^t(2 \ 1 \ 0).$$

1. Montrer que $\underline{U} = (U_1, U_2, U_3)$ est une base de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Est-elle orthonormale pour le produit scalaire canonique ?

2. Montrer qu'il existe un unique produit scalaire φ sur $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour lequel elle est orthonormale.

21 Soient (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale d'un espace euclidien E et n vecteurs u_1, \dots, u_n de E tels que :

$$\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 < 1.$$

1. Montrer que pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 \right).$$

2. En déduire que la famille $(e_i + u_i)_{i=1}^n$ est une base de E .

22 On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur le segment $[a, b]$ ($a < b$ réels) muni du produit scalaire usuel.

1. Soit $f \in E$. Justifier qu'il existe une unique fonction g de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$ telle que $g'' = f$ et $g(a) = g(b) = 0$. Montrer qu'alors :

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = - \int_a^b g'(t)^2 dt.$$

2. Déterminer l'orthogonal du sous-espace F des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Commenter.

23 **Polynômes de Tchebychev**

★ On définit la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des *polynômes de Tchebychev* par les termes initiaux $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ ainsi que la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. a. Calculer T_2 et T_3 .

b. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n pour $n \in \mathbb{N}$.

c. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos nx.$$

Remarque. La propriété de la question c. est caractéristique des polynômes de Tchebychev. En utilisant cette formule ainsi que celles de Moivre et du binôme de Newton, il

est possible d'expliciter les coefficients de T_n .

2. a. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_{-1}^1 \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

- b. Montrer que l'application

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- a. Montrer que la famille (T_0, T_1, \dots, T_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-elle orthonormale ?
 b. Calculer $\|T_n\|$ puis $\langle T_n, X^n \rangle$.

24 Familles obtusangles (oral ESCP 2011, extrait)

- ♣ Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On dit qu'une famille (u_1, \dots, u_p) de vecteurs de E est *obtusangle* si, pour tout $i \neq j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\langle u_i, u_j \rangle < 0$ (ce qui impose aux vecteurs d'être tous non nuls).

On veut montrer par récurrence que si une famille de $p \geq 2$ vecteurs est obtusangle, alors toute sous-famille de $p - 1$ vecteurs est libre.

1. Établir la propriété pour $p = 2$.
 2. On suppose la propriété vérifiée pour toute famille obtusangle de $p + 1 \geq 2$ vecteurs et on souhaite la démontrer pour une famille obtusangle (u_1, \dots, u_{p+2}) de $p + 2$ vecteurs. On suppose à cet effet que la sous-famille (u_1, \dots, u_{p+1}) est liée.

- a. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \langle u_{p+1}, u_k \rangle > 0.$$

- b. En déduire qu'il existe $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $\lambda_k < 0$ et montrer que l'on peut supposer $k = p$.
 c. En considérant la famille (y_1, \dots, y_{p+1}) définie par :

$$\forall i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, y_i = u_i, \quad y_p = u_{p+1} - \lambda_p u_p, \quad y_{p+1} = u_{p+2},$$

exhiber une contradiction.

- d. Conclure.

Indications

2 Déterminer une forme bilinéaire symétrique définie-positive ψ telle que pour tout $X \in \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $\varphi(X, X) = \psi(X, X)$.

3 2. Montrer que :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P, Q) = \int_0^1 P'(x)Q'(x) dx.$$

4 1. Pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, développer $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|^2$ et $\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|^2$ à l'aide de l'hypothèse.

2. À l'aide de l'identité de polarisation, appliquer le résultat de la question 1. à $f - f(0)$.

5 1. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n .

6 Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^3 .

7 Utiliser le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

8 Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

9 Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace fonctionnel.

10 Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace fonctionnel.

11 Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace fonctionnel.

13 2. Observer que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{i,j} = \alpha \int_0^1 e^{(i+j)\alpha t} dt.$$

14 Écrire A^2 sous la forme $A^2 = -{}^tAA$.

16 Montrer que $\langle e_i, e_j \rangle = 1/2$ pour tous $i \neq j$ et en déduire que la famille (e_1, \dots, e_n) est libre.

18 2. Écrire les conditions $\langle e_1, e_4 \rangle = \langle e_2, e_4 \rangle = \langle e_3, e_4 \rangle = 0$ sous la forme d'un système d'inconnue e_4 .

19 Construire une base (P_1, P_2, P_3) par récurrence : choisir P_{k+1} non nul et orthogonal à $1 + X - X^3, P_1, \dots, P_k$ (au besoin, écrire ces relations d'orthogonalité sous la forme d'un système d'inconnue les coefficients de P_{k+1}).

23 3. b. On pourra écrire $T_n = a_n X^n + Q_n$ où $\deg Q_n < n$.