Variables aléatoires à densité

Feuille d'exercices

1 ✎ Pour $c \in \mathbb{R}$, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{(1+x)^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur c pour que f soit une densité de probabilité. On suppose cette condition satisfaite dans la suite de l'exercice et on considère une variable aléatoire X de densité f. Tracer l'allule de la courbe représentative de f.
2. Déterminer la fonction de répartition de X et tracer l'allule de sa courbe représentative.
3. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

2 ✎ Soit X une variable aléatoire de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\mathbf{e}^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité et tracer l'allure de son graphe.
2. Calculer la fonction de répartition de X et tracer l'allure de sa courbe représentative.
3. Montrer que X admet une espérance et une variance que l'on calculera.
4. Montrer que $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

3 Montrer que la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ x-1 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ (x-2)^5 & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de probabilité. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de densité f.

4 ★ ***Loi béta de première espèce***

Dans tout l'exercice, n et m désignent des entiers naturels non nuls. On pose :

$$\beta(n,m) = \int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{m-1}\,\mathrm{d}u.$$

1. **a.** Prouver que $\beta(n,m) = \beta(m,n)$ et que, pour $m \geqslant 2$:
$$\beta(n,m) = \frac{m-1}{n}\beta(n+1,m-1).$$
   b. En déduire une expression de $\beta(n,m)$.
2. On considère la fonction
$$f_{n,m} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(n,m)} x^{n-1}(1-x)^{m-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
   a. Montrer que $f_{n,m}$ est une densité de probabilité.
   b. Soit X une variable aléatoire admettant $f_{n,m}$ comme densité. Après en avoir justifié l'existence, calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X})$.

5
1. **a.** Montrer que
$$\mathrm{F} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{1+\mathbf{e}^{-x}}$$
est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité, dont on déterminera une densité.
   b. Étudier l'existence de l'espérance et de la variance de X.
   c. Calculer l'espérance de X.
2. On considère la variable aléatoire $\mathrm{Y} = \dfrac{\mathbf{e}^{\mathrm{X}}+1}{\mathbf{e}^{\mathrm{X}}-1}$.
   a. En déterminer une densité.
   b. Admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

6 ✎ Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-2,1]$.
1. Après en avoir justifié l'existence, calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\mathrm{Z} = \mathrm{X}^2$.
2. Déterminer une densité de Z et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(\mathrm{Z})$ à partir de cette densité.

7 ✎ Soit X une variable aléatoire uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Déterminer la loi et, si elles existent, l'espérance et la variance de $\mathrm{Y} = \tan \mathrm{X}$.

8 ★ Soient $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. On note $\mathrm{X} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \mathrm{U}_i$ et $\mathrm{Y} = \min_{1\leqslant i\leqslant n} \mathrm{U}_i$.
1. Déterminer une densité de X, son espérance et sa variance.
2. Mêmes questions avec Y.

9 ✎ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Déterminer une densité de $\mathrm{S} = \mathrm{X}+\mathrm{Y}$ dans les deux cas suivants.
1. X et Y suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs 1 et 2.
2. X suit la loi uniforme sur $[0,1]$ et Y la loi exponentielle de paramètre 1.

10 Soient X, Y et Z des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant respectivement des lois uniformes sur $[0,1]$, $[0,2]$ et $[0,3]$. Déterminer une densité de $\mathrm{S} = \mathrm{X}+\mathrm{Y}+\mathrm{Z}$.

11 ★ **1.** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $x, y \in \mathbb{R}$ pour que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On note F_X et F_Y les fonctions de répartition associées.

a. Déterminer une densité de X^2.

b. Déterminer une densité de $-Y$.

c. En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

d. Déterminer la probabilité que la matrice aléatoire

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

12 On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1.

1. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que la variable aléatoire $Y - tX$ admet pour densité la fonction

$$h : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\mathbf{e}^{-x}}{t+1} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\mathbf{e}^{x/t}}{t+1} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

2. En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = Y/X$.

3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \frac{X}{X+Y}$.

13 Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $]0, r]$. On pose $U = \ln(X/r)$ et $V = -\ln(Y/r)$.

1. Déterminer la fonction de répartition puis une densité de U et V. Tracer l'allure des représentations graphiques de ces fonctions.

2. En déduire une densité et la fonction de répartition de $U + V$.

3. On pose $Q = X/Y$.

a. Montrer que Q est une variable à densité et donner une densité de Q.

b. La variable aléatoire Q admet-elle une espérance ?

14 ***Loi de l'arcsinus*** *(oral ESCP)*

1. Soit Z une variable aléatoire réelle à valeurs dans $]0, 1[$ possédant une densité g continue sur $]0, 1[$. Montrer que Z admet une espérance. Que vaut cette espérance si l'on suppose de plus que $g(1-x) = g(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$?

2. Montrer que la fonction $x \longmapsto \sin x$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. Montrer que sa fonction réciproque φ est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer sa dérivée.

3. Montrer la convergence et calculer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Indication. Mettre sous forme canonique l'expression sous la racine pour se ramener à la dérivée de φ.

4. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

5. Soit X une variable aléatoire admettant cette densité.

a. Déterminer $\mathbb{E}(X)$ en utilisant la question **1.**.

b. Retrouver ce résultat en utilisant la définition de l'espérance et le changement de variable $x = \sin^2\theta$.

15 On choisit au hasard sur le cercle trigonométrique deux points A et B, ce qui signifie que l'on choisit deux angles α et β de façon indépendante et uniforme dans $[-\pi, \pi[$, les points A et B étant représentés dans le plan complexe par $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\alpha}$ et $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\beta}$ respectivement. On se propose de calculer la probabilité que la longueur AB soit inférieure ou égale à 1 et, pour ce faire, on note X la variable aléatoire égale à la longueur AB.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \leqslant 1) = \mathbb{P}\big(\cos(\alpha - \beta) \geqslant \frac{1}{2}\big)$.

2. Trouver une densité de $\alpha - \beta$ puis déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant 1)$.

3. Soit Y la variable aléatoire prenant l'unique valeur de $[-\pi, \pi[$ congrue à $\alpha - \beta$ modulo 2π. Déterminer une densité de Y et commenter le résultat. Retrouver le résultat de la question **2.**.

4. Montrer que $X = 2\sin\frac{|Y|}{2}$.

5. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

6. Déterminer une densité de X (on pourra utiliser l'exercice 14).

16 ★ On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que X admet une densité f continue sur $\mathbb{R}_+$. On définit la variable aléatoire $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X).

1. Peut-on affirmer que f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$? On supposera que c'est le cas.

2. Déterminer la loi de Y en fonction de f.

3. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum n\,\mathbb{P}(Y=n)$ ainsi que la fonction
$$G : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_0^x tf(t)\,dt.$$

a. Justifier que :
$$\forall k\in\mathbb{N},\quad k\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} tf(t)\,dt \leqslant (k+1)\int_k^{k+1} f(t)\,dt$$

b. Montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad S_n \leqslant G(n+1) \leqslant S_n+1.$$

c. En déduire que que X admet une espérance si, et seulement si, Y admet une espérance et que dans ces conditions, $\mathbb{E}(Y)\leqslant\mathbb{E}(X)\leqslant\mathbb{E}(Y)+1$.

4. On suppose dans cette question que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.

a. Préciser la loi de Y et calculer son espérance.

b. Montrer que $Z = X-Y$ est une variable à densité et en donner une densité. Montrer que Z admet une espérance que l'on calculera.

17 Trois personnes A, B et C se présentent à l'ouverture d'un bureau de poste comportant deux guichets. A et B accèdent directement à un guichet, tandis que C attend que l'un des deux guichets se libère.
On note X, Y et Z les variables aléatoires égales au temps passé au guichet par les usagers A, B et C respectivement. On suppose que ces variables sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $U=|X-Y|$ et $V=\min(X,Y)$.

1. a. Déterminer une densité de $-Y$ puis une densité de $X-Y$.

b. En déduire une densité de U.

2. On note E l'événement « C est la dernière personne à sortir de la poste ». Justifier que $E=[U-Z\leqslant 0]$ puis en déduire la valeur de $\mathbb{P}(E)$.

3. Montrer que V suit la même loi que U.

4. On note T le temps passé par C à la poste.

a. Montrer que T est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

b. Calculer le temps moyen passé par C à la poste.

18 ★ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que X est à densité f continue sur $\mathbb{R}_+$ et nulle sur $\mathbb{R}_-^*$. On note F la fonction de répartition de X.
On définit la fonction
$$\varphi : x\in\mathbb{R}_+ \longmapsto \int_0^x tf(t)\,dt.$$

1. Montrer que :
$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \int_0^x \big(1-F(t)\big)\,dt = x\big(1-F(x)\big)+\varphi(x).$$

2. Montrer que X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale ci-dessous converge avec dans ces conditions :
$$\mathbb{E}(X)=\int_0^{+\infty}\big(1-F(t)\big)\,dt.$$

3. *Application.* On considère des variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ mutuellement indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$. On pose $M_n=\max(X_1,\dots,X_n)$.

a. Déterminer la fonction de répartition de M_n et montrer que M_n est à densité.

b. Montrer que M_n admet une espérance et la calculer (on exprimera le résultat sous la forme d'une somme).

19 ★ Dans tout l'exercice, X est une variable aléatoire de densité f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive en tout point de $\mathbb{R}_+^*$. On suppose également f continue sur $\mathbb{R}_+$ et on note F la fonction de répartition de X.

1. On suppose que X représente la durée de vie d'un composant électronique.

a. Pour $t,h\in\mathbb{R}_+^*$, exprimer à l'aide de F la probabilité $p(t,h)$ que le composant tombe en panne avant l'instant $t+h$ sachant qu'il fonctionnait encore à l'instant t.

b. Établir que :
$$p(t,h)\sim\frac{f(t)}{1-F(t)}h,\qquad h\to 0.$$

On appelle taux de panne de X la fonction positive
$$\lambda_X : t\in\mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{f(t)}{1-F(t)}.$$

2. a. Pour $t\in\mathbb{R}_+^*$, calculer $\int_0^t \lambda_X(u)\,du$ puis montrer que la seule connaissance de la fonction λ_X permet de déterminer la loi de X.

b. En déduire que λ_X est constant si, et seulement si, X suit une loi exponentielle.

3. On suppose que X représente la durée de vie (en années) d'un appareil dont le taux de panne est donné par $\lambda_X(t)=t^3$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$.

a. Quelle est la probabilité que l'appareil survive plus d'un an ?

b. Quelle est la probabilité que cet appareil, déjà âgé d'un an, survive au moins deux ans de plus ?

20 ★ On considère une entreprise de transports en commun et on s'intéresse aux passages des bus à une station donnée lors d'une journée.
Le service commence à l'instant $T_0=0$. Le premier bus de la journée passe à l'instant T_1. On pose $U_1=T_1-T_0$ qui représente donc le temps entre l'ouverture du service et le passage du premier bus de la journée.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, T_n désigne l'instant où le n-ième bus arrive à la station et U_{n+1} le temps écoulé entre les passages du n-ième et du $(n+1)$-ième bus de la journée.
On suppose que les variables aléatoires U_n, $n\in\mathbb{N}^*$, sont mutuellement indépendantes et qu'elles suivent la même loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, exprimer T_n en fonction des U_i, $i\in\mathbb{N}^*$, puis en déduire la loi de T_n.

On définit également, pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$ tels que $s \leqslant t$, le nombre $\mathrm{N}_{s,t}$ de bus qui sont passés à la station dans l'intervalle de temps $[s, t]$.

2. Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, justifier que $[\mathrm{N}_{0,t} \geqslant n] = [\mathrm{T}_n \leqslant t]$. En déduire que la variable aléatoire $\mathrm{N}_{0,t}$ suit la loi de Poisson de paramètre λt.

On admet que, pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$ tels que $s \leqslant t$, la variable aléatoire $\mathrm{N}_{s,t}$ suit la même loi que $\mathrm{N}_{0,t-s}$.

3. On suppose qu'un passager arrive à la station à un instant $t \in \mathbb{R}_+$ donné. On définit le temps d'attente W_t du passager jusqu'à l'arrivée du premier bus.

a. Justifier que pour tout $h \in \mathbb{R}_+$, $[\mathrm{W}_t > h] = [\mathrm{N}_{t,t+h} = 0]$.

b. En déduire la loi de W_t. Quel est le temps d'attente moyen du passager avant l'arrivée du premier bus ?