

Diagonalisation

Feuille d'exercices

1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la matrice carrée

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer qu'il existe deux réels a_n et b_n que l'on déterminera tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$.
2. Retrouver le résultat de la question 1. en utilisant un polynôme annulateur de degré 2 de M .
3. Retrouver le résultat de la question 1. en diagonalisant M .
4. Retrouver le résultat de la question 1. en développant $((M + I_3) - I_3)^n$.

2 Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Diagonaliser A .
2. En déduire l'anticommutant de A , i.e. l'ensemble des matrices $M \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM + MA = 0$.

3 Soit

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a. Déterminer deux matrices D diagonale et P inversible de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$. Calculer P^{-1} .
b. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On définit trois suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par leurs termes initiaux $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ et $z_0 = 0$ ainsi que les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n + 3y_n + \frac{3}{2}z_n - 3 \\ y_{n+1} = -\frac{3}{2}x_n + 2y_n + \frac{3}{2}z_n - 1 \\ z_{n+1} = -\frac{3}{2}x_n + 3y_n + \frac{1}{2}z_n - 3 \end{cases}$$

On pose $B = {}^t(-3 \quad -1 \quad -3) \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = {}^t(x_n \quad y_n \quad z_n) \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- a. Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre X_n , X_{n+1} , A et B .
- b. Justifier que la matrice $I_3 - A$ est inversible.
- c. En déduire un vecteur $U \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $U = AU + B$.

- d. En s'inspirant de la méthode usuelle d'étude des suites arithmético-géométriques, exprimer x_n , y_n et z_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

4 Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle donnée par les conditions initiales $x_0 = 2$, $x_1 = -3$, $x_2 = -1$
★ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n.$$

On pose $X_n = {}^t(x_n \quad x_{n+1} \quad x_{n+2}) \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. a. Trouver une matrice $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b. Déterminer deux matrices D diagonale et P inversible de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
2. On pose $Y_n = P^{-1}X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
a. Déterminer une relation de récurrence satisfaite par la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
b. En déduire une expression de Y_n puis de X_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Exprimer x_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

5 Montrer qu'une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ et sa transposée ont mêmes valeurs propres.

6 Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note

★♣

$$D'(\omega, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \omega| \leq r\}$$

le disque fermé du plan complexe centré en ω et de rayon r .

1. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que :

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D'(a_{i,i}, r_i)$$

(les disques $D'(a_{i,i}, r_i)$, $1 \leq i \leq n$, sont appelés disques de Geršgorin de A .)

2. On suppose que A est à diagonale strictement dominante, i.e. que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

3. On suppose que A est une matrice stochastique, i.e. à coefficients réels positifs telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

- a. Montrer que 1 est valeur propre de A .
- b. Montrer que les valeurs propres complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1.
- c. Montrer que si les coefficients diagonaux $a_{i,i}$, $1 \leq i \leq n$, sont strictement positifs alors les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1 à l'exception de 1.

- 7** Soit $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni des lois usuelles et Δ l'endomorphisme de E qui, à une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, associe la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Déterminer les éléments propres de Δ .
- 8** Soient u et v deux endomorphismes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie tels que $v \circ u - u \circ v = u$. Montrer que $v \circ u^k - u^k \circ v = ku^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que u est nilpotent.
- 9** Soit u un endomorphisme nilpotent. Déterminer les valeurs propres de u .
- 10** Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et λ un scalaire. Montrer que λ^2 est valeur propre de u^2 si, et seulement si, λ ou $-\lambda$ est valeur propre de u .
- 11** Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^n de rang 1. Montrer que l'un au moins des endomorphismes $f - \text{id}$ et $f + \text{id}$ est inversible.
- 12** Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E . Montrer que les endomorphismes $f \circ g$ et $g \circ f$ ont mêmes valeurs propres.
- 13** Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on considère les éléments $f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$, $0 \leq k \leq 3$. On note F le sous-espace de E engendré par les vecteurs f_0, f_1, f_2 et f_3 .
- Justifier que $\mathcal{F} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ est une base de F .
 - Montrer que l'application $u : f \mapsto f' - f''$ est un endomorphisme de F .
 - L'endomorphisme u est-il inversible ? diagonalisable ?
- 14** Pour $n \geq 1$ donné, on considère l'application
- $$\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X^2 - 1)P' - (nX + 1)P.$$
- Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - Soit P un vecteur propre de φ . Montrer que P ne peut avoir d'autres racines complexes que 1 et -1 . En déduire les valeurs propres de φ .
 - L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
- 15** Soit $n \geq 2$ entier.
- On note tr l'application qui à toute matrice $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace $\text{tr} M$, i.e. la somme de ses coefficients diagonaux.
 - Vérifier qu'il s'agit d'une application linéaire et que $\text{Im tr} = \mathbb{R}$.
 - En déduire la dimension de Ker tr .
 - Établir que Ker tr et $\text{Vect}(I_n)$ sont supplémentaires dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
 - Soit $f : M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + (\text{tr} M)I_n$.
 - Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

- Déterminer les éléments propres de f .
- En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

- 3.** On choisit une matrice $J \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\text{tr} J = 0$ et l'on considère l'endomorphisme $g : M \mapsto M + (\text{tr} M)J$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
- Déterminer un polynôme de degré 2 annulateur de g .
 - Montrer que 1 est la seule valeur propre de g .
 - L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

- 16** Soient $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux applications linéaires. On note A et B les matrices représentatives de f et g en bases canoniques.
- Préciser la taille des matrices A, B, AB et BA .
 - Justifier que $g \circ f$ est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 qui n'est ni injectif ni surjectif. En déduire une valeur propre pour BA .
 - On suppose que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - Montrer que si $X = {}^t(x \ y) \neq 0$, alors $BX \neq 0$.
 - En déduire que toute valeur propre de AB est aussi valeur propre de BA .
 - Justifier que BA est diagonalisable.

- 17** Soit E un espace vectoriel complexe de dimension 4 rapporté à une base $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère l'endomorphisme f de E représenté en base \underline{e} par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbb{C}).$$

- Déterminer le rang de f ainsi qu'une base de l'image et du noyau de f .
- Déterminer les éléments propres de f .
- Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{C}$ pour lesquelles la matrice M est diagonalisable et diagonaliser M le cas échéant.

- 18** Étant donné un entier $n \geq 2$, on considère deux matrices $L \in \mathbf{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulles. On pose $A = CL$ et $a = LC$.
- Calculer A^2 en fonction de a et A . Qu'en déduit-on concernant les valeurs propres de A ?
 - Montrer que $\text{rg} A = 1$.
 - Déterminer les valeurs propres de A .
 - Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $A^2 \neq 0$.

- 19** Soit f un endomorphisme de rang 1 d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$.
- Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, $\text{tr} f \neq 0$.

Remarque. On rappelle que $\text{tr } f$ est par définition la trace commune à toutes les matrices représentatives de f .

- 20** Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.
1. Montrer que si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de u , alors $E_\lambda(u) \subset \text{Im } u$.
 2. En déduire que si u est diagonalisable, alors $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont supplémentaires dans E .

- 21** Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $f^4 = f^2$ et dont -1 et 1 sont valeurs propres. Montrer que f est diagonalisable.

- 22** Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $u^3 - 3u^2 + 2u = 0$. Montrer que u est diagonalisable.

- 23** Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie sur \mathbb{K} .
- ♣
1. a. Pour $u, v \in \mathbf{L}(E)$, montrer que $\dim \text{Ker}(u \circ v) \leq \dim(\text{Ker } u) + \dim(\text{Ker } v)$.
b. Montrer plus généralement que pour $u_1, \dots, u_r \in \mathbf{L}(E)$,

$$\dim \text{Ker}(u_1 \circ \dots \circ u_r) \leq \sum_{j=1}^r \dim(\text{Ker } u_j).$$

2. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
3. En déduire que si u est diagonalisable et stabilise un sous-espace vectoriel F , alors il induit sur celui-ci un endomorphisme diagonalisable.

- 24** Soient $n \geq 2$ et $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonalisables.

- ♣
1. La somme $S = A + B$ est-elle diagonalisable ?
 2. On fait l'hypothèse $AB = BA$. Montrer que $S = A + B$ est diagonalisable.
Indication. On pourra introduire les endomorphismes u et v de \mathbb{R}^n canoniquement associés à A et B et utiliser le résultat démontré dans la question 3. de l'exercice 23.

- 25**
- ★
1. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme diagonalisable de E . Soit $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u . On suppose que v est un endomorphisme de E tel que $v^2 = u$.
a. On suppose dans cette question que les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de u respectivement associées aux vecteurs propres e_1, \dots, e_n sont deux-à-deux distinctes. Montrer que u et v commutent et en déduire que chaque vecteur e_i est propre pour v . En déduire que v est diagonalisable.
b. Sans hypothèse sur les valeurs propres de u , l'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

- 2.** Application. Résoudre l'équation

$$X^2 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

d'inconnue $X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

- 26**
- ♣
1. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n rapporté à une base \underline{e} . Soient f un endomorphisme de E et H un hyperplan d'équation $\varphi(x) = 0$ où φ est une forme linéaire non nulle de E .
a. Montrer que l'hyperplan H est stable par f si, et seulement si, $\varphi \circ f$ est colinéaire à φ .
b. Soient A et L les matrices représentant respectivement en base \underline{e} les applications linéaires f et φ .
Montrer que l'hyperplan H est stable par f si, et seulement si, tL est vecteur propre de tA .
 2. En déduire les sous-espaces stables par l'endomorphisme de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

- 27** Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice

★

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de u . L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. a. Montrer que les sous-espaces $\text{Ker}(u - 3 \text{id})^2$ et $\text{Ker}(u + \text{id})$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
b. Déterminer une base \underline{e} de \mathbb{R}^3 dans laquelle u est représenté par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer B^n et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

28 Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

★

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}).$$

On pose $\mathbb{1} = M(1, 1)$.

1. a. Déterminer $\text{rg } \mathbb{1}$ et en déduire les valeurs propres de $\mathbb{1}$. Déterminer une base de chacun de ses sous-espaces propres.
b. En déduire les valeurs propres de $M(a, b)$.
2. Justifier que la matrice $M(a, b)$ est diagonalisable.

29 Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{C}^n . On considère l'endomorphisme f de \mathbb{C}^n défini

★

par $f(e_i) = e_{i+1}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $f(e_n) = e_1$.

1. a. Déterminer la matrice J représentative de f en base canonique.
b. Déterminer les valeurs propres de J .
c. Justifier que J est diagonalisable.
2. Pour $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, on considère la *matrice circulante*

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}).$$

- a. Exprimer A comme polynôme en J .
- b. En déduire que A est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

30 À un polynôme unitaire $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_0 \in \mathbb{K}[X]$ donné, on associe sa

★

matrice compagne $C_P \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les valeurs propres de C_P sont les racines de P .
2. Justifier que la matrice C_P est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme P est scindé à racines simples.

Indications

2. Pour $P \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 2I_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

exprimer la condition $AM + MA = 0$ sur $N = P^{-1}MP$. Pour étudier cette nouvelle condition, on pourra décomposer N par blocs selon le même schéma que D (afin de simplifier les calculs) :

$$N = \begin{pmatrix} X & C \\ L & y \end{pmatrix}.$$

6. 1. Pour $X = {}^t(x_1 \ \dots \ x_n) \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , considérer $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_i|$ soit maximal et montrer qu'alors $|\lambda - a_{i,i}| \leq r_i$.
2. Est-ce que 0 est valeur propre de A ?
3. b. Montrer que tous les disques de Geršgorin de A sont inclus dans le disque fermé centré à l'origine et de rayon 1.
- c. Justifier que chaque disque de Geršgorin de A ne rencontre le cercle unité qu'au point 1.

7. Étant donnée une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et un scalaire λ , reformuler la condition $\Delta(u) = \lambda u$.

8. Interpréter la relation $v \circ u^k - u^k \circ v = ku^k$ en termes d'éléments propres d'un endomorphisme bien choisi.

10. Raisonner en termes de bijectivité.

13. 3. Représenter matriciellement u dans la base \mathcal{F} .

14. 2. Si a est racine de P d'ordre m , on peut simplifier l'équation $\varphi(P) = \lambda P$ par $(X - a)^{m-1}$. À quelle condition sur λ existe-t-il $\alpha, \beta \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $P = (X - 1)^\alpha (X + 1)^\beta$ soit solution de l'équation précédente ?

16. 2. Considérer le rang de $g \circ f$.
3. a. Calculer ABX .

17. 2. Les vecteurs propres de f associés à des valeurs propres non nulles sont à rechercher dans $\text{Im } f$.

22. Dédurre de la relation $u \circ (u - \text{id}_E) \circ (u - 2 \text{id}_E) = 0$ que les sous-espaces propres $E_0(u)$, $E_1(u)$ et $E_2(u)$ sont supplémentaires dans E .

23. 1. a. Appliquer le théorème du rang à la restriction de v à $\text{Ker}(u \circ v)$.
2. Si P scindé à racines $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ simples annule u , montrer que les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont supplémentaires dans E . Pour la réciproque, on pourra commencer par chercher un polynôme annulateur d'une matrice diagonale.
3. Observer que si un polynôme P annule u , alors il annule tout endomorphisme induit par u .

24. 2. Considérer les endomorphismes induit par v sur les sous-espaces propres de u .

25. 1. a. Observer que les sous-espaces propres de u sont des droites.