

Intégrales généralisées

Feuille d'exercices

1 Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

- | | |
|--|---|
| <p>1. $\int_0^1 \frac{\arctan t \ln t}{\sqrt{t - \sin t}} dt$;</p> <p>2. $\int_0^{+\infty} e^{-(\ln t)^2} dt$;</p> <p>3. $\int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} dt$;</p> <p>4. $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$;</p> <p>5. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$;</p> <p>6. $\int_0^{+\infty} (\sqrt[3]{t+1} - \sqrt[3]{t}) \sqrt{t} dt$;</p> | <p>7. $\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt \quad (\alpha \in \mathbb{R})$;</p> <p>8. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2(1-t^2)}}$;</p> <p>9. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t^2 - t)}{(1+t)^2} dt$;</p> <p>10. $\int_0^{\pi/2} \tan^\alpha t dt \quad (\alpha \in \mathbb{R})$;</p> <p>11. $\int_0^1 (-\ln t)^\alpha dt \quad (\alpha \in \mathbb{R})$;</p> <p>12. $\int_0^1 t^\alpha \ln(\sin t) dt \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.</p> |
|--|---|

2 Étudier la convergence et, le cas échéant, calculer les intégrales généralisées suivantes :

- | | |
|--|---|
| <p>1. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$;</p> <p>2. $\int_0^{\pi/2} \tan t dt$;</p> <p>3. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sqrt{\cos t}} dt$;</p> <p>4. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(t+1)}$;</p> <p>5. $\int_1^2 \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$;</p> | <p>6. $\int_0^1 t^\beta \ln t dt \quad (\beta \in \mathbb{R})$;</p> <p>7. $\int_0^{+\infty} \left(1 - t \arctan \frac{1}{t}\right) dt$;</p> <p>8. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}}$;</p> <p>9. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+1}$;</p> <p>10. $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{(t-1)(2-t)}}$.</p> |
|--|---|

3 1. Pour $\alpha > 0$, on souhaite établir la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt.$$

- a. Traiter le cas $\alpha > 1$.
b. En utilisant une intégration par parties, conclure dans le cas $0 < \alpha \leq 1$.
2. En déduire, pour $\alpha > 0$, la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin t}{t^\alpha}\right) dt.$$

4 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \geq \alpha$. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)/t^2 dt$ diverge.

5 1. Justifier la convergence des intégrales

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$$

et montrer que $I = J$.

2. En considérant $I + J$, calculer I et J .

6 1. Justifier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$.
2. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt.$$

3. Montrer que la fonction

$$g : t \mapsto \frac{\sin t - t}{t^2}$$

peut être prolongée par continuité à l'origine.

4. En déduire la valeur de I .

7 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

1. Justifier la convergence des intégrales généralisées I_n , $n \geq 1$.
2. Pour $n \geq 1$, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .
3. En déduire une expression de I_n à l'aide de factorielles.

8 Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt = 1$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]1, +\infty[$ tel que $x_0^2 f(x_0) = 1$.

9 Montrer que l'application qui, à un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, associe le $(n+1)$ -uplet de réels (x_0, \dots, x_n) défini par

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_k = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^k P(t) dt$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur \mathbb{R}^{n+1} .

10 1. Justifier, pour tout $x > 0$, la convergence de l'intégrale

$$J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$J(x) \sim \frac{e^{-x}}{x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

11 ♣ 1. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{2+t^3} \right)^n dt.$$

Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Indication. On pourra partager l'intervalle d'intégration en deux.

2. Même question avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^5+1)^n}.$$

12 ★ 1. Justifier brièvement que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

2. On considère la fonction $f : x \in [0, +\infty[\mapsto xe^{-x^3|\sin x|}$ et l'on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) dt.$$

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la chaîne d'inégalités ci-dessous :

$$u_n \leq (n+1)\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-n^3\pi^3|\sin t|} dt \leq 2(n+1)\pi \int_0^{\pi/2} e^{-n^3\pi^3 \sin t} dt \leq \frac{n+1}{n^3\pi}.$$

b. En déduire que la série $\sum u_n$ converge puis que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

3. Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$. Est-il nécessaire et/ou suffisant que $f(x)$ tende vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$ pour que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge ? Justifier.

13 ♣ Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.

1. On suppose que f admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en $+\infty$.

Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \ell.$$

2. On suppose que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x tf(t) dt.$$

14 Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^\beta n}$ ($\beta \in \mathbb{R}$);

2. $\sum_{n \geq 1} \frac{a^{\sqrt{\ln n}}}{n}$ ($a \in]0, 1[$).

15 Trouver un équivalent des quantités suivantes :

1. $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $n \rightarrow \infty$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$, $x \rightarrow +\infty$.

16 1. Soient $a > 0$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f'(t) dt$ converge absolument.

a. Justifier que :

$$\forall n \geq a+1, \quad w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) = \int_{n-1}^n (n-1-t)f'(t) dt.$$

b. Montrer que la série $\sum w_n$ est absolument convergente.

2. Étudier la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\ln n)}{n}.$$

On admettra que la suite $(\cos(\ln n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente.

17 ★ 1. Montrer que la fonction

$$f : x \in]0, \pi] \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin(x/2)}$$

se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} dt.$$

Justifier la convergence de l'intégrale I_n . Calculer $I_{n+1} - I_n$ puis I_n .

3. Montrer que, pour une fonction g de classe \mathcal{C}^1 sur un segment $[a, b]$ ($a < b$ réels), on a :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt = 0.$$

4. Montrer que l'intégrale de Dirichlet

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

est convergente et déduire des questions précédentes la valeur de I .

18 ★ On pose

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx \quad I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

1. a. Étudier la convergence des intégrales généralisées précédentes.
- b. À l'aide du changement de variable $x = \cos t$, montrer que $I_n = W_{2n+1}$ pour $n \geq 0$.
- c. À l'aide du changement de variable $x = \tan t$, montrer que $J_n = W_{2n-2}$ pour $n \geq 1$.

2. a. Montrer que

$$\forall x \in [0, 1], \quad 1 - x^2 \leq e^{-x^2},$$

puis que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

b. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n}I_n \leq I \leq \sqrt{n}J_n.$$

3. a. Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

En déduire que $W_n \sim W_{n+1}$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

b. En calculant $(n+1)W_n W_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

4. Déterminer la valeur de I.

19 On considère la fonction

★

$$f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t} \, dt.$$

1. Justifier que f est bien définie.
2. a. Pour $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ donné, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left| f(x) - f(x_0) - (x - x_0) \int_0^1 \cos(x_0 t) \, dt \right| \leq \frac{(x - x_0)^2}{4}.$$

b. En déduire que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer sa dérivée.

20 Étude de la fonction Γ

♣

1. Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) \geq \frac{1}{e} \int_0^1 t^{x-1} \, dt.$$

En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x) = +\infty$.

2. Montrer que :

$$\forall x > 1, \quad \Gamma(x) \geq 2^{x-1} \int_2^{+\infty} e^{-t} \, dt.$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x)$.

On définit, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_t : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto t^{x-1} e^{-t}$.

3. Montrer que f_t est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et calculer f_t' et f_t'' .

4. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leq \min(x/2, 1)$.

a. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left| \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} M_2(t, x)$$

où

$$M_2(t, x) = \begin{cases} (\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1} & \text{si } t < 1 \\ (\ln t)^2 e^{-t} t^x & \text{si } t \geq 1 \end{cases}.$$

b. Justifier la convergence des intégrales

$$\int_0^1 (\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1} \, dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t} t^x \, dt.$$

c. En déduire que Γ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} f_t'(x) \, dt.$$

5. Montrer que la fonction Γ est convexe sur \mathbb{R}_+^* .

21 Déterminer :

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (n^2 + k^2)^{1/n}; \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n} \sin \frac{k}{n^2}.$$

22 1. Montrer que la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

est prolongeable en une fonction f continue sur $[0, \pi/2]$.

2. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin \frac{k\pi}{2n}}.$$

Déterminer la limite ainsi qu'un équivalent simple de u_n lorsque $n \rightarrow \infty$.

23 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \in [0, 1[\mapsto nx^{n-1}$.

Comparer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) \, dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) \, dt.$$

www.fb11d.fr

24 Pour tout $t \in]0, +\infty[$, on considère la fonction

$$f_t : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x^2}{x^2 + t^2}.$$

On pose

$$F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} f_t(x) dt.$$

A-t-on :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} f_t'(x) dt?$$

Indications

- 2** Étudier l'existence de limites finies pour une primitive aux bornes de généralisation.
- Intégration par parties.
 - Intégration par parties.
 - Changement de variable « $u = \sqrt{1 + e^t}$ ».
 - Mettre le dénominateur sous forme canonique puis faire un changement de variable.
 - Mettre l'expression sous la racine sous forme canonique puis faire un changement de variable.

- 3** 2. Montrer que

$$\int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{\sin t}{t^\alpha} \right) dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}} dt$$

ont même nature. Pour étudier la seconde intégrale, on pourra linéariser $\sin^2 t$.

- 5** 1. Utiliser un changement de variable.
- 6** 2. Linéariser $\sin^3 t$.
- 7** 2. Procéder à une intégration par parties dans I_n , en primitivant $t \mapsto 1$ et en dérivant $t \mapsto 1/(1+t^2)^n$.
3. Conjecturer une expression et l'établir par récurrence ou utiliser un produit télescopique :

$$\forall n \geq 1, I_n = I_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{I_{k+1}}{I_k}.$$

- 8** Étudier l'intégrale sur $]1, +\infty[$ de $x \mapsto f(x) - 1/x^2$.

- 11** 2. Revenir aux ε .

- 12** 2. a. On rappelle que si f est T-périodique, alors $\int_a^{a+T} f$ ne dépend pas de a .

- 13** 1. Commencer par traiter le cas $\ell = 0$. Pour $\varepsilon > 0$ donné et $a > 0$ à ajuster, montrer qu'on peut majorer chacun des termes du second membre de

$$\forall x \geq a, \quad \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right| \leq \frac{1}{x} \left| \int_0^a f(t) dt \right| + \frac{1}{x} \int_a^x |f(t)| dt$$

par $\varepsilon/2$ pour x assez grand. Traiter ensuite le cas général en étudiant la fonction $x \mapsto f(x) - \ell$.

2. Utiliser une intégration par parties.

- 14** Utiliser une comparaison série-intégrale.

- 15** Utiliser des comparaisons série-intégrale.

- 16** 2. On pourra justifier que la série étudiée est de même nature que la série

$$\sum \int_{n-1}^n \frac{\sin(\ln t)}{t} dt.$$

- 17** 4. Étudier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt.$$

- 21** 1. Étudier le logarithme de l'expression proposée et reconnaître une somme de Riemann.

2. Relier l'expression proposée à une somme de Riemann grâce à une formule de Taylor.

- 22** 2. En faisant apparaître les sommes de Riemann de la fonction f , comparer (u_n) à la suite des sommes partielles de la série harmonique, dont on déterminera un équivalent par comparaison série-intégrale.