Travaux dirigés

Intégrales généralisées

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2018/2019

Exercice 1

Question 1

La fonction
$$f : x \longmapsto \frac{\arctan x \ln x}{\sqrt{x} - \sin x}$$
est continue sur $]0, 1]$ car $\sin x \leqslant x < \sqrt{x}$ pour tout $x \in]0, 1[$ par concavité de sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin 1 < 1$.

Lorsque $x \to 0$,
$$f(x) \sim \frac{x \ln x}{\sqrt{x} - x + o(x)} = \frac{x \ln x}{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})} \sim \frac{x \ln x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \ln x \to 0,$$
si bien que f est prolongeable par continuité en 0. Son intégrale $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc faussement généralisée (donc convergente).

Exercice 1

Question 2

La fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-(\ln x)^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- Lorsque $x \to 0$, $f(x) \to 0$ si bien que f peut être prolongée par continuité en 0. L'intégrale $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente.
- Lorsque $x \to +\infty$, $f(x) \to 0$, mais cela ne suffit pas pour que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ! Plus précisément,
$$x^2 f(x) = \exp\big(2 \ln x - (\ln x)^2\big) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$
car
$$2 \ln x - (\ln x)^2 = o\big((\ln x)^2\big) - (\ln x)^2 \sim -(\ln x)^2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty.$$
Ainsi $0 \leqslant f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ lorsque $x \to +\infty$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 1

Question 3

La fonction $f : x \longmapsto (\ln x)\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- Lorsque $x \to 0$, $f(x) \sim \ln x \leqslant 0$ si bien que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge par comparaison à l'intégrale convergente $\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$.
- Lorsque $x \to +\infty$, on remarque que
$$0 \leqslant f(x) = \big(x^2 (\ln x)\mathrm{e}^{-x}\big)\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
ou
$$0 \leqslant f(x) = \big((\ln x)\mathrm{e}^{-x/2}\big)\mathrm{e}^{-x/2} = o(\mathrm{e}^{-x/2})$$
et l'on conclut que $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge par comparaison à l'une des intégrales convergentes $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ ou $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t$.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 1

Question 4

La fonction $f : x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- La fonction f est bornée au voisinage de 0 :
$$\forall x \in]0, 1], \quad |f(x)| \leqslant 1$$
d'où l'on déduit la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale convergente $\int_0^1 \mathrm{d}t$.
- Lorsque $x \to +\infty$,
$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2} \geqslant 0$$
d'où l'on déduit la convergence de $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 1

Question 5

La fonction
$$f : x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}}$$
est continue sur $]0, +\infty[$.

- Lorsque $x \to 0$,
$$f(x) \sim \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}} \geqslant 0$$
et $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1/2}}$ $\left(\frac{1}{2} < 1\right)$.

- Lorsque $x \to +\infty$,
$$\ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln x + o(\ln x) \sim \ln x$$
de sorte que, pour $\alpha \geqslant 1$,
$$x^\alpha f(x) \sim \frac{\ln x}{x^{3/2-\alpha}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geqslant \frac{3}{2} \\ 0 & \text{si } \alpha < \frac{3}{2} \end{cases}.$$
En choisissant α tel que $1 < \alpha < \frac{3}{2}$, par exemple $\alpha = \frac{4}{3}$, on a donc $0 \leqslant f(x) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ lorsque $x \to +\infty$, d'où l'on déduit que $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, convergente puisque $\alpha > 1$.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 1

Question 8

La fonction
$$f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x^2)}}$$
est continue sur $]0, 1[$.

- Lorsque $x \to 0$,
$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{2/3}} \geqslant 0,$$
d'où l'on déduit la convergence de l'intégrale $\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{2/3}}$ $\left(\frac{2}{3} < 1\right)$.

- Pour mener l'étude au voisinage de 1, on utilise le changement de variable affine $x = 1 - y$, c'est-à-dire
$$y = 1 - x \xrightarrow[x\to 1]{} 0,$$
qui préserve la nature de l'intégrale (avec $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$). On a alors
$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-(1-y)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{y(2-y)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\frac{1}{y^{1/3}} \geqslant 0,$$
et l'on obtient à nouveau la convergence de l'intégrale $\int_{1/2}^{\to 1} f(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_{\to 0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1/3}}$.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 1

Question 9

La fonction
$$f : x \longmapsto \frac{\ln(x^2 - x)}{(1+x)^2}$$
est continue sur $]1, +\infty[$ (car $x^2 > x$ pour $x > 1$).

- Pour mener l'étude au voisinage de 1, on pose $x = 1 + y$, c'est-à-dire
$$y = x - 1 \xrightarrow[x\to 1]{} 0.$$
On a alors
$$f(x) \sim \frac{\ln x + \ln(x-1)}{4} = \frac{\ln(1+y) + \ln y}{4} = \frac{o(\ln y) + \ln y}{4} \sim \frac{\ln y}{4} \leqslant 0,$$
d'où l'on tire la convergence de l'intégrale $\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale convergente $\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$.

- Lorsque $x \to +\infty$,
$$f(x) = \frac{2\ln x + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(1+x)^2} = \frac{2\ln x + o(\ln x)}{(1+x)^2} \sim \frac{2\ln x}{x^2}.$$
Par suite, étant donné $\alpha \geqslant 1$, on a :
$$x^\alpha f(x) \sim \frac{2\ln x}{x^{2-\alpha}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 2 \\ +\infty & \text{si } \alpha \geqslant 2 \end{cases}.$$
Pour un choix de α tel que $1 < \alpha < 2$, par exemple $\alpha = \frac{3}{2}$, on a donc $0 \leqslant f(x) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ lorsque $x \to +\infty$, ce qui amène la convergence de l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, convergente puisque $\alpha > 1$.

En conclusion, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 2

Question 1

La fonction
$$f : x \longmapsto \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$
est continue sur $[0, +\infty[$. On la primitive par décomposition en éléments simples :
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \ln|x+1| - \ln|x+2| + k.$$
Pour $k = 0$ en particulier, on obtient une primitive F admettant une limite finie en $+\infty$:
$$F(x) = \ln\frac{x+1}{x+2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$
On en déduit la convergence et la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_{t=0}^{t\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(0) = \ln 2.$$

Exercice 2

Question 2

La fonction
$$f : x \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
est continue sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Elle y admet pour primitive la fonction
$$F : x \longmapsto -\ln|\cos x| = -\ln\cos x,$$
qui n'admet pas de limite finie en $\frac{\pi}{2}$. Ainsi l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \tan t\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 2

Question 3

La fonction
$$f : x \longmapsto \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$$
est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Elle y admet pour primitive la fonction
$$F : x \longmapsto -2\sqrt{\cos x},$$
qui admet des limites finies en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On en déduit la convergence et la valeur de l'intégrale généralisée
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_{t\to-\pi/2}^{t\to\pi/2} = \lim_{x\to\pi/2} F(x) - \lim_{x\to-\pi/2} F(x) = 0.$$
Ce n'est pas surprenant (une fois la convergence de l'intégrale acquise) puisqu'on intègre une fonction impaire sur un domaine symétrique par rapport à l'origine.

Exercice 2

Question 4

La fonction
$$f : x \longmapsto \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}$$
est continue sur $[0, +\infty[$. On la primitive par décomposition en éléments simples :
$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{-x+1}{x^2+1} + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1} \\ &= -\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\ln|x+1| + k.\end{aligned}$$

Pour $k = 0$ en particulier, on obtient une primitive F admettant une limite finie en $+\infty$:
$$F(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}.$$
On en déduit la convergence et la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_{t=0}^{t\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2

Question 7

La fonction

$$f : x \longmapsto 1 - x\arctan\frac{1}{x}$$

est continue sur $]0,+\infty[$. On en détermine les primitives à l'aide d'une intégration par parties, en primitivant $x \longmapsto x$ et en dérivant $x \longmapsto \arctan(1/x)$:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= x - \frac{x^2}{2}\arctan\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{1}{x^2}}\\ &= x - \frac{x^2}{2}\arctan\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\arctan x + k.\end{aligned}$$

Pour $k = 0$ par exemple, on obtient une primitive F de f dont il s'agit d'étudier les limites en 0 et $+\infty$. On obtient sans peine

$$\lim_{x\to 0} F(x) = 0.$$

Pour la limite en $+\infty$, on utilise le développement limité $\arctan u = u + o(u^2)$, $u \to 0$:

$$F(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + \frac{1}{2}\arctan x = \frac{1}{2}\arctan x + o(1), \quad x \to +\infty,$$

d'où l'on déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Puisque F admet des limites finies en 0 et $+\infty$, l'intégrale généralisée $\int_{\to 0}^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_{\to 0}^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_{\to 0}^{\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to 0} F(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Remarque. Le développement de la fonction $\varphi = \arctan$ n'est pas explicitement au programme. Il n'est pas difficile de l'obtenir à l'ordre 2 : ce développement existe d'après la formule de Taylor-Young (appliquée à φ de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0) et, puisque φ est impaire, son coefficient de degré 2 est nul. Connaissant son premier terme (donné par l'équivalent classique de $\arctan x$ lorsque $x \to 0$), il vient :

$$\arctan u = u + o(u^2), \quad u \to 0.$$

Remarque. Pour le déterminer à l'ordre 3 avec les outils au programme, on peut appliquer le théorème de Taylor-Young aux fonctions φ et φ', respectivement de classe $\mathscr{C}^3$ et $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0 ; on obtient :

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \varphi'(0)u + \varphi''(0)\frac{u^2}{2} + \frac{\varphi^{(3)}(0)}{2}\frac{u^3}{3} + o(u^3), \quad u \to 0$$

et

$$\varphi'(u) = \varphi'(0) + \varphi''(0)u + \frac{\varphi^{(3)}(0)}{2}u^2 + o(u^2), \quad u \to 0.$$

En comparant ces développements, on s'aperçoit que celui de φ s'obtient « en primitivant » celui de φ'. Or

$$\varphi'(u) = \frac{1}{1+u^2} = 1 - u^2 + o(u^2), \quad u \to 0$$

d'où le développement de φ à l'ordre 3 :

$$\varphi(u) = \varphi(0) + u - \frac{1}{3}u^3 + o(u^3), \quad u \to 0.$$

Exercice 2

Question 8

La fonction

$$f : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+\mathbf{e}^t}}$$

est continue sur $[0,+\infty[$. On va étudier l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ grâce au changement de variable $u = \sqrt{1+\mathbf{e}^t}$. Plus précisément, l'application $u \longmapsto t = \ln(u^2-1)$, de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant de $[\sqrt{2},+\infty[$ sur $[0,+\infty[$, si bien que les intégrales ci-dessous sont de même nature :

$$\int_0^{\to+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\mathbf{e}^t}} = \int_{\sqrt{2}}^{\to+\infty}\frac{1}{u}\frac{2u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{2}}^{\to+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2-1}.$$

On obtient une primitive de

$$g : u \in [\sqrt{2},+\infty[\longmapsto \frac{2}{u^2-1}$$

sur l'intervalle $[\sqrt{2},+\infty[$ par l'intermédiaire d'une décomposition en éléments simples :

$$\int\frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2-1} = \int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = \ln\frac{u-1}{u+1} + k.$$

Pour $k = 0$, on obtient une primitive G de g qui admet une limite finie en $+\infty$, d'où la convergence de l'intégrale et sa valeur :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\mathbf{e}^t}} &= \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} g(u)\,\mathrm{d}u = \big[G(u)\big]_{\sqrt{2}}^{\to+\infty} = \lim_{u\to+\infty} G(u) - G(\sqrt{2})\\ &= -\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 2\ln(\sqrt{2}+1).\end{aligned}$$

Exercice 2

Question 9

La fonction

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x^2+x+1}$$

est continue sur $[0,+\infty[$. L'équivalent $f(x) \sim \frac{1}{x^2} \geqslant 0$ lorsque $x \to +\infty$ assure que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

Pour calculer une primitive de f, on commence par mettre le dénominateur sous forme canonique :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}.$$

On poursuit avec le changement de variable affine $y = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan y + k = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + k.$$

Pour $k=0$ en particulier, on obtient une primitive F de f qui permet d'achever le calcul :

$$\int_0^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_0^{\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(0)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 2

Question 10

La fonction

$$f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$$

est continue sur l'intervalle $]1,2[$. Tout comme en **9.**, on commence par mettre sous forme canonique le trinôme sous la racine :

$$\forall x \in\,]1,2[, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}} = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}.$$

On effectue ensuite le changement de variable $2t-3 = \sin u$ dans l'intégrale $\int_{\to1}^{\to2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Plus précisément, l'application $u \longmapsto t = \frac{3+\sin u}{2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $]1,2[$, si bien que les intégrales ci-dessous sont de même nature :

$$\int_{\to1}^{\to2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\to1}^{\to2} \frac{2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(2t-3)^2}} = \int_{\to-\pi/2}^{\to\pi/2} \frac{\cos u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_{\to-\pi/2}^{\to\pi/2} \frac{\cos u}{|\cos u|}\,\mathrm{d}u = \int_{\to-\pi/2}^{\to\pi/2} \mathrm{d}u.$$

Cette dernière intégrale est trivialement convergente et son calcul est immédiat :

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-1)(2-t)}} = \pi.$$

Exercice 3

Question 1.a

La fonction

$$f_\alpha : x \longmapsto \frac{\sin x}{x^\alpha}$$

est continue sur $[1,+\infty[$.

Si $\alpha > 1$, alors on peut utiliser la majoration

$$\forall x \geqslant 1, \quad |f_\alpha(x)| = \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha}$$

pour obtenir, par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, convergente puisque $\alpha > 1$, la convergence absolue de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3

Question 1.b

On obtient, par intégration par parties sur un segment $[1,x] \subset [1,+\infty[$,

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t^\alpha}\right]_1^x - \alpha\int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

Or, en raisonnant comme en **a.** avec $\alpha+1>1$, on établit la convergence absolue donc la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$, d'où il ressort que l'intégrale partielle $\int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x\to+\infty$.
On en déduit que l'intégrale partielle $(*)$ admet également une limite finie lorsque $x\to+\infty$, ce qui établit la convergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Remarque. Par passage à la limite lorsque $x\to+\infty$ dans $(*)$, on obtient donc la relation

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t^\alpha}\right]_1^{+\infty} - \alpha\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t.$$

Notons qu'on ne peut pas faire la même intégration par parties sur $]0,+\infty[$, car le crochet et l'intégrale au membre de droite divergent sur $]0,+\infty[$ (alors que l'intégrale de gauche converge puisque la fonction est prolongeable par continuité à l'origine). Cependant, en primitivant $t\longmapsto \sin t$ en $t\longmapsto 1-\cos t$, on peut justifier que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t^\alpha}\right]_0^{+\infty} + \alpha\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t.$$

Remarque. On peut montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente pour $0<\alpha\leqslant 1$. En effet, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f_\alpha(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha\pi^\alpha}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(n+1)^\alpha\pi^\alpha}.$$

Puisque $\frac{1}{(n+1)^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha} \geqslant 0$ est le terme général d'une série divergente étant donné que $\alpha\leqslant 1$, on en déduit que la série de terme général $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|f_\alpha(t)|\,\mathrm{d}t$, $n\in\mathbb{N}^*$, diverge. Dans ces conditions, ses sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|f_\alpha(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\pi^{(n+1)\pi}|f_\alpha(t)|\,\mathrm{d}t$$

n'ont pas de limite finie lorsque $n\to\infty$. Par contraposée du théorème de composition des limites, cela exclut l'existence d'une limite finie pour $\int_\pi^x|f_\alpha(t)|\,\mathrm{d}t$ lorsque $x\to+\infty$, si bien que l'intégrale $\int_\pi^{+\infty}|f_\alpha(t)|\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 3

Question 2

La fonction

$$g_\alpha : x\longmapsto \ln\Big(1+\frac{\sin x}{x^\alpha}\Big)$$

est continue sur $]0,+\infty[$ (on a $\frac{\sin x}{x^\alpha}\geqslant 0$ pour $x\in\,]0,1]$ et $\frac{\sin x}{x^\alpha}\geqslant -\frac{1}{x^\alpha} > -1$ pour $x\in\,]1,+\infty[$). Pour $0<\alpha\leqslant 1$, elle est prolongeable par continuité en 0 alors que pour $\alpha>1$,

$$g_\alpha(x) = \ln\Big(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\big(1+o(1)\big)\Big) = (1-\alpha)\ln x + o(\ln x) \sim (1-\alpha)\ln x \geqslant 0.$$

Dans les deux cas, l'intégrale $\int_0^1 g_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Puisqu'un équivalent ne suffit pas (g_α ne garde par un signe constant au voisinage de $+\infty$), un développement asymptotique donne, sachant que $\alpha>0$:

$$g_\alpha(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha} - \frac{\sin^2 x}{2x^{2\alpha}} + o\Big(\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}\Big), \quad x\to+\infty.$$

Compte-tenu de la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ établie en **1.b.**, l'intégrale $\int_1^{+\infty} g_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que

$$\int_1^{+\infty} \Big(g_\alpha(t) - \frac{\sin t}{t^\alpha}\Big)\,\mathrm{d}t$$

et donc, puisque

$$g_\alpha(x) - \frac{\sin x}{x^\alpha} = -\frac{\sin^2 x}{2x^{2\alpha}} + o\Big(\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}\Big) \sim -\frac{\sin^2 x}{2x^{2\alpha}} \leqslant 0, \quad x \to +\infty,$$

de même nature que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\forall x \geqslant 1, \quad \frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x^{2\alpha}} - \frac{\cos 2x}{x^{2\alpha}}\Big)$$

où, par un argument similaire à celui employé en **1.b.**, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t^{2\alpha}}\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2\alpha}}$, c'est-à-dire convergente si, et seulement si, $2\alpha > 1$.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > \frac{1}{2}$.

Exercice 4

Pour $x \geqslant 1$ donné, l'application de l'inégalité des accroissements finis à la fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[1, x]$ donne, puisque $f'(t) \geqslant \alpha$ pour tout $t \in [1, x]$:

$$f(x) - f(1) \geqslant \alpha(x-1).$$

Par suite,

$$\forall x \geqslant 1, \quad \frac{f(x)}{x^2} \geqslant \frac{f(1) + (\alpha-1)x}{x^2} \sim \frac{\alpha - 1}{x} \geqslant 0, \quad x \to +\infty$$

d'où l'on déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge par comparaison à l'intégrale de Riemann divergente $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Exercice 5

Question 1

La fonction $f : t \longmapsto \ln(\sin t)$ est continue sur $]0, \pi/2]$ et, lorsque $t \to 0$,

$$\begin{aligned} f(t) &= \ln\big(t(1 + o(1))\big) = \ln t + \ln\big(1 + o(1)\big) \\ &= \ln t + o(1) = \ln t + o(\ln t) \sim \ln t \leqslant 0. \end{aligned}$$

Par comparaison à l'intégrale convergente $\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$, on en déduit que l'intégrale I est convergente.

Puis le changement de variable affine $u = \pi/2 - t$ transforme

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t \quad \text{en} \quad \int_0^{\pi/2} \ln\Big(\sin\Big(\frac{\pi}{2} - t\Big)\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = J$$

et assure donc que ces deux intégrales sont de même nature donc toutes deux convergentes, et de même valeur.

Exercice 5

Question 2

Il vient :

$$\begin{aligned} I + J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \ln\Big(\frac{\sin(2t)}{2}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(2t)\big)\,\mathrm{d}t - \frac{\pi}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

Le changement de variable affine $s = 2t$ suivi du changement de variable affine $u = \pi - s$ dans la deuxième intégrale donnent ensuite :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(2t)\big)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin s)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin s)\,\mathrm{d}s + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin s)\,\mathrm{d}s\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin s)\,\mathrm{d}s + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u\Big) = I. \end{aligned}$$

On en déduit la valeur de :

$$I = J = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Exercice 6

Question 1

La fonction

$$t \longmapsto \frac{\sin^3 t}{t^2}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 :

$$f(t) = \frac{\sin^3 t}{t} \sim \frac{t^3}{t} = t^2 \to 0, \quad t \to 0.$$

De plus,

$$\forall t \geqslant 1, \quad |f(t)| \leqslant \frac{1}{t^2}$$

d'où l'on déduit la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

Exercice 6

Question 2

On obtient par linéarisation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin^3 t = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t$$

d'où,

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{3}{4}\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{4}\int_x^{+\infty} \frac{\sin 3t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{4}\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{4}\int_{3x}^{+\infty} \frac{\sin u}{(u/3)^2}\frac{\mathrm{d}u}{3} \\ &= \frac{3}{4}\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

toutes intégrales convergentes puis, par passage à la limite lorsque $x \to 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\lim_{x \to 0} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6

Question 3

D'après le développement limité

$$g(t)=\frac{\sin t-t}{t}=\frac{-t^3/6+o(t^3)}{t}\sim-\frac{t^3/6}{t}=-\frac{t^2}{6}\to 0$$

lorsque $t\to 0$.

Exercice 6

Question 4

On a :

$$\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\int_x^{3x}\frac{\sin t-t}{t^2}\,\mathrm{d}t+\int_x^{3x}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_x^{3x}g(t)\,\mathrm{d}t+\ln 3$$

où, puisque la fonction g est continue sur $[0,+\infty[$, la fonction

$$x\longmapsto\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

est continue (et même dérivable) sur $[0,+\infty[$, si bien que :

$$\int_x^{3x}g(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{3x}g(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to 0]{}0.$$

On peut donc conclure d'après la question **2.** :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{3\ln 3}{4}.$$

Exercice 7

Question 1

Pour $n\geqslant 1$ donné, la fonction

$$f_n:x\longmapsto\frac{1}{(1+x^2)^n}$$

est continue sur $[0,+\infty[$. En observant que

$$f_n(x)\sim\frac{1}{x^{2n}}\geqslant 0,\quad x\to+\infty,$$

on justifie la convergence de l'intégrale $I_n=\int_0^{+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{2n}}$, convergente puisque $2n\geqslant 2>1$.

Exercice 7

Question 2

Pour $n\geqslant 1$ donné, on obtient par intégration par parties sur un segment $[0,x]\subset[0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}&=\left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x+2n\int_0^x\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{x}{(1+x^2)^n}+2n\Big(\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}-\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}\Big)\end{aligned}$$

d'où, par passage à la limite lorsque $x\to+\infty$, vu les convergences établies en **1.**, $I_n=2n(I_n-I_{n+1})$ c'est-à-dire :

$$I_{n+1}=\frac{2n-1}{2n}I_n.$$

Exercice 7

Question 3

En itérant la relation de récurrence obtenue en **2.**, on conjecture que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad I_n=\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{1}{2}I_1=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{\pi}{2}$$

ce que l'on démontre ensuite par récurrence. L'expression précédente peut être reformulée :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad I_n=\frac{(2n-2)!}{(2n-2)^2(2n-4)^2\cdots 2^2}\frac{\pi}{2}=\frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}\big((n-1)!\big)^2}\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 8

S'il n'existe pas de réel $x_0\in]1,+\infty[$ tel que $x_0^2f(x_0)=1$, alors la fonction continue $g:x\longmapsto f(x)-\frac{1}{x^2}$ ne s'annule pas sur l'intervalle $]1,+\infty[$: elle y garde donc un signe constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Ainsi la fonction g est continue et garde un signe constant sur l'intervalle $]1,+\infty[$ sans y être identiquement nulle, alors que

$$\int_1^{+\infty}g(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=0,$$

ce qui est absurde.

L'hypothèse de départ est donc fausse : il existe un réel $x_0\in]1,+\infty[$ tel que $x_0^2f(x_0)=1$.

Exercice 9

On vérifie tout d'abord que les intégrales généralisées sont bien définies.

Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$ non nul de degré d : $P=\sum_{k=0}^d a_kX^k$ avec $a_d\neq 0$. Pour $k\in[\![0,n]\!]$, la fonction $t\longmapsto\mathbf{e}^{-t}t^kP(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ avec :

$$\mathbf{e}^{-t}t^kP(t)\sim\mathbf{e}^{-t}a_dt^{k+d}=o\Big(\frac{1}{t^2}\Big),\quad t\to+\infty.$$

On en déduit que l'intégrale

$$x_k(P)=\int_0^{+\infty}\mathbf{e}^{-t}t^kP(t)\,\mathrm{d}t$$

converge absolument par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

On peut donc définir l'application

$$\varphi:\mathbb{R}_n[X]\longrightarrow\mathbb{R}^{n+1},P\longmapsto\big(x_0(P),\ldots,x_n(P)\big),$$

qui est linéaire par linéarité de l'intégrale généralisée convergente, dont on veut établir la bijectivité.

Comme les espaces $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ sont de même dimension finie $n+1$, il suffit de démontrer que φ est injective.

Or, si $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k\in\mathbb{R}_n[X]$ est tel que $\varphi(P)=0$, alors

$$\int_0^{+\infty}\mathbf{e}^{-t}P(t)^2\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^n a_k\int_0^{+\infty}\mathbf{e}^{-t}t^kP(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^n a_kx_k(P)=0.$$

Comme la fonction $t\longmapsto\mathbf{e}^{-t}P(t)^2$ est positive et continue sur $[0,+\infty[$, il en résulte que $\mathbf{e}^{-t}P(t)^2=0$ pour tout $t\in[0,+\infty[$. Ainsi le polynôme P admet une infinité de racines donc est nul.

Exercice 10

Question 1

Pour $x > 0$ donné, la fonction

$$f : t \longmapsto \frac{\mathbf{e}^{-t}}{t}$$

est continue sur $[x, +\infty[$. Par ailleurs,

$$t^2 f(t) = t\mathbf{e}^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0,$$

ce qui signifie que $0 \leqslant f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ lorsque $t \to +\infty$, d'où l'on déduit la convergence de l'intégrale $J(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

Exercice 10

Question 2

Pour $x > 0$ donné, on obtient par intégration par parties sur un segment $[x, y] \subset [x, +\infty[$:

$$\int_x^y \frac{\mathbf{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathbf{e}^{-t}}{t}\right]_x^y - \int_x^y \frac{\mathbf{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathbf{e}^{-x}}{x} - \frac{\mathbf{e}^{-y}}{y} - \int_x^y \frac{\mathbf{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

d'où, en passant à la limite lorsque $y \to +\infty$,

$$J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathbf{e}^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-t}}{x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathbf{e}^{-x}}{x^2} = o\left(\frac{\mathbf{e}^{-x}}{x}\right), \quad x \to +\infty$$

(toutes intégrales convergentes), d'où l'on déduit que

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = o\left(\frac{\mathbf{e}^{-x}}{x}\right), \quad x \to +\infty$$

si bien que

$$J(x) = \frac{\mathbf{e}^{-x}}{x} + o\left(\frac{\mathbf{e}^{-x}}{x}\right) \sim \frac{\mathbf{e}^{-x}}{x}, \quad x \to +\infty.$$

Exercice 11

Question 1

Tout d'abord, la convergence des intégrales !

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n : x \in [0, +\infty[\longmapsto \left(\frac{\sin x}{2 + x^3}\right)^n$$

est continue sur $[0, +\infty[$. On a par ailleurs $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ lorsque $x \to +\infty$ si bien que l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \mathrm{d}t/t^2$.

Puis la convergence de la suite.

À $t \in [0, +\infty[$ fixé, $f_n(t)$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. On peut donc conjecturer la convergence de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers 0 (attention, les choses ne se passent pas toujours aussi bien : on ne peut pas échanger $\lim_{n \to \infty}$ et $\int_a^b$ en général !). Pour le démontrer, on cherche une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeant vers 0 telle que $|I_n| \leqslant \varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La difficulté tient à ce qu'on ne sait pas primitiver simplement la fonction f_n. On peut donc tenter de majorer $|f_n|$ par une fonction g_n aisément primitivable dont l'intégrale tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Par exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, +\infty[, \quad |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{x^{3n}} = g_n(x).$$

En effet, $\int_1^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente avec :

$$\int_1^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3n}} = \frac{1}{3n-1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

mais l'intégrale $\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t$ diverge car $3n \geqslant 1$.

Pour contourner le problème, on majore différemment $|f_n|$ sur les intervalles $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$: comme l'intervalle $[0, 1]$ est borné, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \left(\frac{|\sin t|}{2 + t^3}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{d}t = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Dans ces conditions,

$$|I_n| \leqslant \int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3n-1} = \varepsilon_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

d'où l'on déduit par encadrement que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Remarque. On peut aussi conclure grâce à une majoration valable sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |I_n| \leqslant \int_0^{+\infty} \left(\frac{|\sin t|}{2 + t^3}\right)^{n-1} \cdot \left|\frac{\sin t}{2 + t^3}\right| \mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{2 + t^3}\right| \mathrm{d}t,$$

où l'intégrale du membre de droite est une constante, bien définie car l'intégrale I_1 converge absolument.

Exercice 11

Question 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, la fonction

$$h_n : x \in [0, +\infty[\longmapsto \frac{1}{(1 + x^5)^n}$$

est continue sur $[0, +\infty[$. Puis $h_n(x) \sim \frac{1}{x^{5n}} \geqslant 0$ lorsque $x \to +\infty$ de sorte que $J_n = \int_0^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \mathrm{d}t/t^{5n}$, convergente puisque $5n \geqslant 5 > 1$.

Les techniques utilisées en **1.b.** ne s'appliquent pas directement ici car la suite géométrique sous l'intégrale a une raison qui s'approche dangereusement de 1 lorsque $t \to 0$. On les conjugue en jouant sur la longueur du premier morceau. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \varepsilon/2$ et on écrit (toutes intégrales convergentes) :

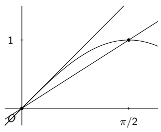
$$\begin{aligned} |J_n| &\leqslant \int_0^\delta \frac{\mathrm{d}t}{(t^5 + 1)^n} + \int_\delta^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t^5)^n} \\ &\leqslant \int_0^\delta \mathrm{d}t + \int_\delta^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^5)^{n-1}} \frac{1}{1 + t^5}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \delta + \int_\delta^{+\infty} \frac{1}{(1 + \delta^5)^{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^5} = \delta + \left(\frac{1}{1 + \delta^5}\right)^{n-1} \cdot J_1. \end{aligned}$$

Comme le membre de droite tend vers $\delta < \varepsilon$ lorsque $n \to \infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|J_n| \leqslant \varepsilon$, ce qui établit la convergence de $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers 0.

Exercice 12
Question 1

On peut bien sûr faire l'étude de la fonction $\varphi : x \longmapsto \frac{\pi}{2}\sin x - x$: elle est croissante puis décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc prend des valeurs supérieures ou égales à $\varphi(0) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Mais il est plus élégant de faire appel à des arguments de convexité. Puisque $\sin'' = -\sin$ est négatif sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction sin est concave sur cet intervalle. Sa courbe représentative se situe donc « au-dessus de ses cordres » et « en-dessous de ses tangentes ». En travaillant sur la tangente à l'origine et sur la corde reliant les points de coordonnées $(0,0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, on obtient l'inégalité classique :



$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

Exercice 12
Question 2.a

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on a tout d'abord, par croissance de l'intégrale :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t\mathbf{e}^{-t^3|\sin t|}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (n+1)\pi\mathbf{e}^{-n^3\pi^3|\sin t|}\,\mathrm{d}t.$$

Puis, la fonction $t \longmapsto \mathbf{e}^{-n^3\pi^3|\sin t|}$ étant π-périodique, son intégrale sur un segment de longueur π ne dépend pas du choix du segment, si bien que

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathbf{e}^{-n^3\pi^3|\sin t|}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{e}^{-n^3\pi^3|\sin t|}\,\mathrm{d}t.$$

On poursuit en utilisant la parité de la fonction $t \longmapsto \mathbf{e}^{-n^3\pi^3|\sin t|}$:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{e}^{-n^3\pi^3|\sin t|}\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\pi/2} \mathbf{e}^{-n^3\pi^3|\sin t|}\,\mathrm{d}t = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{e}^{-n^3\pi^3 \sin t}\,\mathrm{d}t.$$

On peut alors utiliser l'inégalité de la question **1.** :

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{e}^{-n^3\pi^3\sin t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} \mathbf{e}^{-2n^3\pi^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n^3\pi^2}\left(1 - \mathbf{e}^{-2n^3\pi^2}\right) \leqslant \frac{1}{2n^3\pi^2}.$$

D'où le résultat :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant \frac{n+1}{n^3\pi}.$$

Exercice 12
Question 2.b

La fonction f étant positive, il suffit de montrer que la fonction

$$F : x \in [0, +\infty[\longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est majorée. Or, pour $x \in [0, +\infty[$ donné et $n = \lfloor x/\pi \rfloor$, on a $x < (n+1)\pi$ d'où, toujours par positivité de f et d'après la question **a.**,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{(n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant u_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k^3\pi} \leqslant u_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^3\pi}.$$

En effet, la série $\sum \frac{n+1}{n^3\pi}$ converge par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^3}$:

$$\frac{n+1}{n^3\pi} \sim \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2} \geqslant 0, \quad n \to \infty.$$

Exercice 12
Question 3

La condition $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$ n'est pas suffisante vu le contre-exemple de l'intégrale de Riemann divergente $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Elle n'est pas non plus nécessaire : la fonction de la question **2.** fournit un contre-exemple.

Exercice 17
Question 1

Il vient lorsque $x \to 0$:

$$f(x) = \frac{2\sin\frac{x}{2} - x}{2x\sin\frac{x}{2}} = \frac{-\frac{1}{24}x^3 + o(x^3)}{2x\sin\frac{x}{2}} \sim \frac{-\frac{1}{24}x^3}{x^2} = -\frac{1}{24}x + o(x).$$

On peut donc prolonger f par continuité à l'origine en posant $f(0) = 0$ et la fonction ainsi prolongée est dérivable à l'origine avec $f'(0) = -\frac{1}{24}$ vu le développement limité à l'ordre 1 établi ci-dessus.

La fonction f est par ailleurs de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \pi]$ par opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, avec au voisinage de 0 :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{x^2\cos\frac{x}{2} - \left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2}{4x^2\sin^2\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{x^2\left(1 - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) - \left(x - \frac{x^3}{24} + o(x^4)\right)^2}{4x^2\sin^2\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{-\frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}{4x^2\sin^2\frac{x}{2}} \sim \frac{-\frac{1}{24}x^4}{x^4} \to -\frac{1}{24} = f'(0).$$

Ainsi f' est continue en 0 et donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

Exercice 17
Question 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$x \longmapsto \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

est continue sur $]0, \pi]$ et se prolonge par continuité en 0 :

$$\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \sim \frac{\frac{2n+1}{2}x}{\frac{x}{2}} \to 2n+1, \quad x \to 0.$$

Son intégrale I_n est donc faussement généralisée.

Par ailleurs, en utilisant la formule

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},$$

il vient :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^\pi \left(\sin\left(\frac{2n+3}{2}t\right) - \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right)\frac{\mathrm{d}t}{\sin\frac{t}{2}}$$
$$= 2\int_0^\pi \cos\big((n+1)t\big)\,\mathrm{d}t = 0$$

d'où l'on déduit que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = I_0 = \pi.$$

Exercice 17

Question 3

Par intégration par parties, il vient pour $\lambda > 0$:

$$\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \frac{g(a)\cos(\lambda a) - g(b)\cos(\lambda b)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b g'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t$$

d'où :

$$\left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|g(a)\cos(\lambda a)| + |g(b)\cos(\lambda b)| + \left|\int_a^b g'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right|\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|g(a)| + |g(b)| + \int_a^b |g'(t)\cos(\lambda t)|\,\mathrm{d}t\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|g(a)| + |g(b)| + \int_a^b |g'(t)|\,\mathrm{d}t\right) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0,$$

si bien, par encadrement, que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 17

Question 4

On commence par justifier la convergence de l'intégrale de Dirichlet. Pour cela, une intégration par parties sur un segment $[1, x] \subset [1, +\infty[$ donne :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^x - \alpha\int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

Partant de

$$\forall t \geqslant 1, \quad \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2},$$

on justifie la convergence absolue donc la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$, d'où il ressort que l'intégrale partielle $\int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$.
On en déduit que l'intégrale partielle $(*)$ admet également une limite finie lorsque $x \to +\infty$, ce qui établit la convergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
Par ailleurs, la fonction $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité à l'origine, d'où la convergence de l'intégrale de Dirichlet.

Pour en calculer la valeur, on tente de rapprocher I_n d'une intégrale partielle : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = 2\int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\pi \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\left(\frac{1}{t} - f(t)\right)\mathrm{d}t$$
$$= 2\int_0^\pi \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} - 2\int_0^\pi \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)f(t)\,\mathrm{d}t$$

où, par changement de variable affine $u = \frac{2n+1}{2}t$,

$$\int_0^\pi \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$$

et, d'après le résultat établi en **3.** appliqué à la fonction f, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$ d'après **1.**,

$$\int_0^\pi \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Il en ressort d'après **2.** que :

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 18

Question 1.a

- Pour $n \in \mathbb{N}$, les intégrales
$$W_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$$
ne sont pas généralisées : on y intègre des fonctions continues sur un segment.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$ avec :
$$f_n(x) \sim \frac{1}{x^{2n}} \geqslant 0, \quad x \to \infty$$
si bien que l'intégrale $J_n = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$ converge par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$, convergente puisque $2n \geqslant 2 > 1$.
- Enfin, la fonction $x \longmapsto \mathbf{e}^{-x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ avec :
$$\mathbf{e}^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to +\infty,$$
ce qui assure la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty}\mathbf{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

Exercice 18

Question 1.b

Le changement de variable $x = \cos t$ donne (dans l'intégrale définie I_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = -\int_\pi^0 (1-\cos^2 t)^n \sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^\pi \sin^{2n+1} t\,\mathrm{d}t = W_{2n+1}.$$

Exercice 18

Question 1.c

Le changement de variable $t \longmapsto x = \tan t$, de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$, donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{(1+\tan^2 t)^{n-1}}$$
$$= \int_0^{\pi/2}(\cos^2 t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = W_{2n-2}.$$

Exercice 18

Question 2.a

La convexité de la fonction exponentielle donne immédiatement :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{e}^u \geqslant 1 + u$$

d'où l'on déduit en particulier que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad 1 - x^2 \leqslant \mathbf{e}^{-x^2}.$$

Il en ressort également que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 < 1 + x^2 \leqslant \mathbf{e}^{x^2},$$

ce qui donne la deuxième inégalité :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \mathbf{e}^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}.$$

Exercice 18
Question 2.b

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient d'après la question **a.** :

$$\forall x \in [0,1], \quad (1-x^2)^n \leqslant \mathbf{e}^{-nx^2}$$

d'où

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathbf{e}^{-nx^2} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-nx^2} \,\mathrm{d}x$$

par convergence et positivité de $\int_1^{+\infty} \mathbf{e}^{-nx^2} \,\mathrm{d}x$ (justifiée ci-dessous).

En parallèle, on a :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad 0 \leqslant \mathbf{e}^{-nx^2} \leqslant \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

d'où l'on déduit la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-nx^2} \,\mathrm{d}x$ et l'inégalité :

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-nx^2} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = J_n.$$

Il reste à observer, par changement de variable affine $t = \sqrt{n}x$, que :

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-nx^2} \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{n}} = \frac{I}{\sqrt{n}}$$

pour conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n} I_n \leqslant I \leqslant \sqrt{n} J_n.$$

Exercice 18
Question 3.a

Pour $n \in \mathbb{N}$ donné et $t \in [0,\pi/2]$, on a $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$ d'où $\sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t$, si bien que $W_{n+1} \leqslant W_n$ par croissance de l'intégrale.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on procède par intégration par parties en dérivant $t \longmapsto \cos^{n+1} t$ et en primitivant $t \longmapsto \cos t$:

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} (\cos t)(\cos t)^{n+1} \,\mathrm{d}t \\ &= \big[(\sin t)(\cos t)^{n+1}\big]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin t)^2 (\cos t)^n \,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-(\cos t)^2)(\cos t)^n \,\mathrm{d}t = (n+1)(W_n - W_{n+2}). \end{aligned}$$

On en déduit la formule attendue $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

En utilisant les deux points précédents, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n+1}{n+2} W_n = W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n.$$

En divisant chaque membre de cette inégalité par $W_n > 0$ (la fonction $\sin^n$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$), on en déduit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1,$$

d'où il ressort par encadrement que $W_{n+1}/W_n \to 1$ c'est-à-dire que $W_{n+1} \sim W_n$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 18
Question 3.b

La formule de la question **a.** donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$$

ce qui montre que la suite $\big((n+1)W_{n+1}W_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Elle est donc égale à son premier terme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)W_{n+1}W_n = W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}.$$

D'après la question **a.**, on a donc :

$$W_n^2 \sim W_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2n}, \quad n \to \infty$$

et finalement :

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \quad n \to \infty.$$

Exercice 18
Question 4

D'après les questions **1.b.** et **3.b.**,

$$\sqrt{n} I_n = \sqrt{n} W_{2n+1} \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad n \to \infty$$

et de même, d'après **1.c.**,

$$\sqrt{n} J_n = \sqrt{n} W_{n-2} \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad n \to \infty.$$

Il en ressort par passage à la limite dans l'inégalité de la question **2.b.** que :

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 19
Question 1

Il s'agit de montrer, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ donné, que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t} \,\mathrm{d}t$ est bien définie. Il s'agit en fait d'une intégrale faussement généralisée car la fonction $t \longmapsto \frac{\sin(xt)}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 :

$$\frac{\sin(xt)}{t} \sim \frac{xt}{t} = x \to x, \quad t \to 0.$$

Exercice 19
Question 2.a

On pense naturellement à l'inégalité de Taylor-Lagrange, mais il n'est pas possible de l'appliquer directement à la fonction f, dont on la dérivabilité n'est pas encore acquise (cf. question **b.**). On l'applique plutôt à une fonction auxiliaire.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad & f(x) - f(x_0) - (x-x_0)\int_0^1 \cos(x_0 t) \,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 \big(\sin(xt) - \sin(x_0 t) - (x-x_0)\cos(x_0 t)\big) \frac{\mathrm{d}t}{t}. \end{aligned}$$

Or, pour $t \in]0,1]$ donné, la fonction $\varphi_t : x \longmapsto \sin(xt)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad |\varphi_t''(x)| = \left|-t^2 \sin(xt)\right| \leqslant t^2.$$

On obtient donc pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, par application de l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction φ_t sur $[x_0, x]$:

$$|\varphi_t(x) - \varphi_t(x_0) - (x - x_0)\varphi_t'(x_0)| \leqslant t^2 \frac{(x-x_0)^2}{2}$$

si bien que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall t \in]0,1],$$
$$|\sin(xt) - \sin(x_0 t) - (x - x_0)t\cos(x_0 t)| \leqslant t^2 \frac{(x-x_0)^2}{2}.$$

Il vient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left| f(x) - f(x_0) - (x - x_0)\int_0^1 \cos(x_0 t)\,\mathrm{d}t \right| =$$
$$= \left| \int_0^1 \big(\sin(xt) - \sin(x_0 t) - (x - x_0)\cos(x_0 t)\big) \frac{\mathrm{d}t}{t} \right|$$
$$\leqslant \int_0^1 |\sin(xt) - \sin(x_0 t) - (x - x_0)\cos(x_0 t)| \frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$\leqslant \int_0^1 t\frac{(x-x_0)^2}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{(x-x_0)^2}{4}.$$

Exercice 19

Question 2.b

Pour $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, la question **a.** fournit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{x_0\}, \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \int_0^1 \cos(x_0 t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{|x - x_0|}{4} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

si bien que par encadrement :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \int_0^1 \cos(x_0 t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui justifie la dérivabilité de f en tout point $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ avec :

$$f'(x_0) = \int_0^1 \cos(x_0 t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sin x_0}{x_0}.$$

Exercice 20

Question 1

Pour $x > 0$, on a :

$$\forall t \in]0,1], \quad t^{x-1}\mathbf{e}^{-t} \geqslant t^{x-1}\mathbf{e}^{-1}$$

d'où :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{\mathbf{e}}\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t,$$

toutes intégrales convergentes. En observant que

$$\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty,$$

on en déduit que

$$\lim_{x \to 0} \Gamma(x) = +\infty.$$

Exercice 20

Question 2

Pour $x > 1$, on a de même :

$$\forall t \geqslant 2, \quad t^{x-1}\mathbf{e}^{-t} \geqslant 2^{x-1}\mathbf{e}^{-t}$$

d'où :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_2^{+\infty} t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \geqslant 2^{x-1}\int_2^{+\infty} \mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

toutes intégrales convergentes. Puisque $2^{x-1} \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$, il en ressort que :

$$\lim_{x \to +\infty} \Gamma(x) = +\infty.$$

Exercice 20

Question 3

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_t : x \longmapsto t^{x-1}\mathbf{e}^{-t} = \mathbf{e}^{(x-1)\ln t - t}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_t'(x) = (\ln t)t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_t''(x) = (\ln t)^2 t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}.$$

Exercice 20

Question 4.a

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ donné, l'inégalité demandée s'obtient par application directe de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur le segment $[x, x+h]$ à la fonction f_t, de classe $\mathscr{C}^2$, à condition de montrer que :

$$\forall y \in [x, x+h], \quad |f_t''(y)| \leqslant M_2(t,x).$$

Or, pour $y \in [x, x+h] \subset [\frac{x}{2}, x+1]$ sachant que $|h| \leqslant \min(\frac{x}{2}, 1)$, il vient en tenant compte du sens de variation de $\alpha \longmapsto t^\alpha$, différent selon la position de t par rapport à 1 :

$$\forall t \geqslant 1, \quad |f_t''(y)| = (\ln t)^2 t^{y-1}\mathbf{e}^{-t} \leqslant (\ln t)^2 t^x \mathbf{e}^{-t} = M_2(t,x)$$

et

$$\forall t \in]0,1], \quad |f_t''(y)| = (\ln t)^2 t^{y-1}\mathbf{e}^{-t} \leqslant (\ln t)^2 t^{x/2}\mathbf{e}^{-t} = M_2(t,x)$$

d'où le résultat.

Exercice 20

Question 4.b

La fonction $t \longmapsto (\ln t)^2 \mathbf{e}^{-t} t^{x/2-1}$ est continue sur $]0,1]$. Sachant $x > 0$, on peut choisir un réel α tel que $1 - \frac{x}{2} < \alpha < 1$ et alors :

$$0 \leqslant (\ln t)^2 \mathbf{e}^{-t} t^{x/2-1} \sim (\ln t)^2 t^{x/2-1} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right), \quad t \to 0$$

par croissances comparées, d'où l'on déduit la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 (\ln t)^2 \mathbf{e}^{-t} t^{x/2-1}\,\mathrm{d}t$$

par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, convergente puisque $\alpha < 1$.

La fonction $t \longmapsto (\ln t)^2 \mathbf{e}^{-t} t^x$ est continue sur $[1, +\infty[$ avec :

$$(\ln t)^2 \mathbf{e}^{-t} t^x = o\Big(\frac{1}{t^2}\Big), \quad t \to +\infty$$

par croissances comparées, si bien que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} (\ln t)^2 \mathbf{e}^{-t} t^x \, \mathrm{d}t$$

converge par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

Exercice 20

Question 4.c

Compte-tenu de la convergence des intégrales en jeu (en particulier celle de $\int_0^{+\infty} M_2(t,x)\,\mathrm{d}t$, établie en **b.**, mais aussi celle de $\int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t$ que l'on justifierait de la même manière ou que l'on pourrait déduire des autres à partir de l'inégalité de la question **a.**), on peut écrire pour $h \neq 0$ tel que $|h| \leqslant \min(\frac{x}{2}, 1)$:

$$\Big|\frac{\Gamma(x+h)-\Gamma(x)}{h} - \int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t\Big| = \Big|\int_0^{+\infty} \Big(\frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\Big)\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leqslant \int_0^{+\infty} \Big|\frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\Big|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} M_2(t,x)\,\mathrm{d}t.$$

Puisque le dernier majorant tend vers 0 lorsque $h \to 0$ (l'intégrale est une constante par rapport à h), il en ressort par encadrement que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Gamma(x+h)-\Gamma(x)}{h} = \int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t,$$

ce qui signifie que Γ est dérivable au point x avec :

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} \mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 20

Question 5

Pour $x < y$ éléments de $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\forall t \geqslant 1, \quad t^{x-1}\mathbf{e}^{-t} \leqslant t^{y-1}\mathbf{e}^{-t}$$

et :

$$\forall t \in]0,1], \quad t^{x-1}\mathbf{e}^{-t} \geqslant t^{y-1}\mathbf{e}^{-t}$$

d'où, en prenant en compte le signe de $\ln t$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad (\ln t) t^{x-1}\mathbf{e}^{-t} \leqslant (\ln t) t^{y-1}\mathbf{e}^{-t}.$$

Il en ressort, par croissance de l'intégrale généralisée convergente, que :

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{y-1}\mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma'(y).$$

Ainsi la fonction Γ' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui établit la convexité de Γ sur cet intervalle.