Travaux dirigés

Vecteurs aléatoires discrets

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2018/2019

Exercice 1

Question 1

Les 4 réels $p_{i,j} = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$, $i, j \in \{0, 1\}$, définissent la loi conjointe d'un couple (X, Y) si, et seulement si :

$$\begin{cases} p_{0,0} \geqslant 0, p_{0,1} \geqslant 0, p_{1,0} \geqslant 0, p_{1,1} \geqslant 0 \\ p_{0,0} + p_{0,1} + p_{1,0} + p_{1,1} = 1 \end{cases},$$

c'est-à-dire, avec les formules de l'énoncé, $p \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

Exercice 1

Question 2

De la loi conjointe du couple (X, Y), on déduit les lois de X et Y :

$X \backslash Y$	0	1	Loi de X
0	$\frac{1}{6} + p$	$\frac{1}{2} - p$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{3} - p$	p	$\frac{1}{3}$
Loi de Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Ainsi X et Y suivent respectivement des lois de Bernoulli de paramètres $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

Exercice 1

Question 3

À partir de la loi conjointe du couple (X, Y) à nouveau, on obtient la loi de la variable $X + Y$, à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$:

$$\mathbb{P}(X + Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{6} + p,$$

$$\mathbb{P}(X + Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \frac{5}{6} - 2p,$$

$$\mathbb{P}(X + Y = 2) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = p.$$

Exercice 1

Question 4

On obtient de même la loi de XY : la variable est à valeurs dans $\{0, 1\}$ donc suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$\mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = p.$$

On est alors en mesure de calculer

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = p - \frac{1}{6}.$$

Exercice 1

Question 5

D'après **4.**, il est nécessaire que $p = \frac{1}{6}$ pour que les variables X et Y soient indépendantes.

Réciproquement, pour $p = \frac{1}{6}$, la loi conjointe de (X, Y) est donnée par :

$X \backslash Y$	0	1	Loi de X
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
Loi de Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

et l'on vérifie sur ce tableau que X et Y sont indépendantes :

$$\forall i, j \in \{0, 1\}, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = j).$$

En conclusion, les variables X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $p = \frac{1}{6}$.

Exercice 2

Question 1

Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a :

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + a^n}{n!} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \frac{\mathbf{e}}{4} + \frac{\mathbf{e}^a}{4}$$

d'où l'on déduit la valeur de $a = \ln(4 - \mathbf{e})$.

Exercice 2

Question 2

Sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n\,\mathbb{P}(X = n) &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1 + a^n}{n!} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + a^n}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \frac{a}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \frac{a}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \frac{\mathbf{e}}{4} + \frac{a}{4} \mathbf{e}^a. \end{aligned}$$

La série ci-dessus étant absolument convergente par opérations sur les séries exponentielles, absolument convergentes. On en déduit l'existence de

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,\mathbb{P}(X = n) = \frac{\mathbf{e}}{4} + \left(1 - \frac{\mathbf{e}}{4}\right) \ln(4 - \mathbf{e}).$$

Exercice 2

Question 3

Les variables X et Y étant indépendantes, la loi de leur somme est donnée par le produit de convolution : $X+Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=n) &= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=n-i)\\ &= \frac{1}{16}\sum_{i=0}^{n} \frac{1+a^i}{i!}\,\frac{1+a^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{1}{16n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(1+a^i+a^{n-i}+a^n\right)\\ &= \frac{1}{16n!}\left(2^n+2(1+a)^n+(2a)^n\right)\end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton.

Remarque. On peut vérifier que $\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X+Y=n)=1$.

Exercice 3

Pour $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 1$, la matrice

$$\begin{pmatrix} x & y-1 \\ y-1 & x \end{pmatrix}$$

est inversible si, et seulement si, $x^2-(y-1)^2 \neq 0$ i.e. $x \neq y-1$.

En notant B l'événement « la matrice aléatoire A est inversible », on a donc

$$\overline{B} = [X=Y-1] = \bigcup_{k\geqslant 0}[X=k]\cap[Y=k+1]$$

où l'union est disjointe, si bien que, par indépendance de X et Y,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= 1-\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=k+1)\\ &= 1-pe^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k(1-p)^k}{k!} = 1-pe^{-\lambda p}.\end{aligned}$$

Exercice 4

Question 1

La variable $X+Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Compte-tenu de l'indépendance de X et Y, la loi de $X+Y$ est donnée par le produit de convolution de celles de X et Y : pour $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{\substack{i,j\geqslant 0\\ i+j=k}} \mathbb{P}(X=i,Y=j) = \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=k-i)\\ &= \sum_{i=0}^{k} pq^i pq^{k-i} = (k+1)p^2q^k.\end{aligned}$$

Exercice 4

Question 2

Soit $n\in\mathbb{N}$. Conditionnellement à l'événement $[X+Y=n]$, la variable X est à valeurs dans $\llbracket 0,n\rrbracket$ avec, par $\mathbb{P}$-indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned}\forall i\in\llbracket 0,n\rrbracket,\quad \mathbb{P}_{[X+Y=n]}(X=i) &= \frac{\mathbb{P}(X=i,X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(X=i,Y=n-i)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=n-i)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}\\ &= \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Conditionnellement à $[X+Y=n]$, la variable X suit donc la loi uniforme sur $\llbracket 0,n\rrbracket$.

Exercice 4

Question 3.a

Pour $k\in\mathbb{N}$, l'indépendance de X et Y amène :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M\geqslant k) &= \mathbb{P}(X\geqslant k, Y\geqslant k) = \mathbb{P}(X\geqslant k)\,\mathbb{P}(Y\geqslant k)\\ &= \Big(\sum_{i=k}^{\infty} pq^i\Big)^2 = \Big(p\frac{q^k}{1-q}\Big)^2 = q^{2k}.\end{aligned}$$

Par suite, pour $k\in\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(M=k) = \mathbb{P}(M\geqslant k)-\mathbb{P}(M\geqslant k+1) = (1-q^2)q^{2k}.$$

Exercice 4

Question 3.b

La variable V prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$, son signe indiquant laquelle des variables X et Y est égale à M.

Pour $h\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M=k,V=h) &= \mathbb{P}(X=k, Y-X=h)\\ &= \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=k+h) = p^2q^{2k+h}.\end{aligned}$$

Pour $h\leqslant 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M=k,V=h) &= \mathbb{P}(Y=k, Y-X=h)\\ &= \mathbb{P}(Y=k)\,\mathbb{P}(X=k-h) = p^2q^{2k-h}.\end{aligned}$$

La loi de (M,V) est donc donnée par :

$$\forall (k,h)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z},\quad \mathbb{P}(M=k,V=h) = p^2q^{2k+|h|}.$$

Exercice 4

Question 3.c

La loi de V se déduit de celle du couple (M,V) : V est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ avec :

$$\forall h\in V,\quad \mathbb{P}(V=h) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(M=k,V=h) = p^2q^{|h|}\sum_{k=0}^{\infty}q^{2k} = \frac{p^2q^{|h|}}{1-q^2}.$$

On peut alors vérifier l'indépendance des variables M et V : pour $(k,h)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(M=k)\,\mathbb{P}(V=h) = p^2q^{2k+|h|} = \mathbb{P}(M=k,V=h).$$

Exercice 5

Question 1

Pour déterminer la loi de $Y=\inf(X_1,X_2)$ on écrit, par indépendance de X_1 et X_2 :

$$\begin{aligned}\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}(Y>k) &= \mathbb{P}(X_1>k, X_2>k) = \mathbb{P}(X_1>k)\,\mathbb{P}(X_2>k)\\ &= \Big(\sum_{n=k+1}^{\infty}\mathbb{P}(X_1=n)\Big)^2 = \Big(\sum_{n=k+1}^{\infty} qp^n\Big)^2\\ &= \Big(q\frac{p^{k+1}}{1-p}\Big)^2 = p^{2k+2}\end{aligned}$$

où l'on a noté $q=1-p$.

On pourra noter que la formule est encore valable pour $k=-1$.

La variable Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, on a l'union disjointe

$$[Y > k-1] = [Y = k] \cup [Y > k]$$

si bien que

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y > k-1) - \mathbb{P}(Y > k) = p^{2k} - p^{2k+2} = (1-p^2)p^{2k}.$$

Exercice 5

Question 2

On a $Z = Y + X_3$ avec Y fonction de X_1 et X_2 donc indépendante de X_3. La loi de Z s'obtient donc par convolution de celles de Y et X_3 : elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N},\quad \mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = i)\,\mathbb{P}(X_3 = k - i) = q(1-p^2)\sum_{i=0}^{k} p^{2i}p^{k-i} \\ &= q(1-p^2)p^k \sum_{i=0}^{k} p^i = q(1-p^2)p^k \frac{1-p^{k+1}}{1-p} \\ &= (1-p^2)p^k(1-p^{k+1}).\end{aligned}$$

Exercice 5

Question 3

Le temps moyen passé par A_3 à la poste est $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X_3)$ sous réserve d'existence.

En effet, X_3 admet pour espérance

$$\mathbb{E}(X_3) = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X_3 = k) = p(1-p)\sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} = \frac{p}{1-p}$$

étant donné la convergence absolue de la série géométrique dérivée ci-dessous, de raison $p \in \,]-1,1[$.

De même, Y (dont la loi se déduit de celle de X_3 en remplaçant p par p^2) admet pour espérance

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{p^2}{1-p^2}.$$

Finalement,

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{p}{1-p} + \frac{p^2}{1-p^2} = \frac{p+2p^2}{1-p^2}.$$

Exercice 7

Question 1

Les paquets $I_k = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : i + j = k\}$, $k \in \mathbb{N}$, réalisent une partition de $\mathbb{N}^2$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, la somme finie de termes positifs

$$\sum_{(i,j)\in I_k} \frac{\alpha}{(i+j+1)!} = \sum_{(i,j)\in I_k} \frac{\alpha}{(k+1)!} = (k+1)\frac{\alpha}{(k+1)!} = \frac{\alpha}{k!}$$

est le terme général d'une série exponentielle convergente, si bien que la série double $\sum_{i,j} \frac{\alpha}{(i+j+1)!}$ converge (absolument) et sa somme peut être calculée par sommation par paquets :

$$\sum_{i,j\geqslant 0} \frac{\alpha}{(i+j+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{(i,j)\in I_k} \frac{\alpha}{(i+j+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha}{k!} = \alpha\mathbf{e}.$$

Formée de réels positifs, la famille double $\left(\frac{\alpha}{(i+j+1)!}\right)_{i,j\geqslant 0}$ définit donc une loi conjointe si, et seulement si, $\alpha = \mathbf{e}^{-1}$.

Exercice 7

Question 2

La loi conjointe étant symétrique, les deux lois marginales sont égales et données par :

$$\forall i \in \mathbb{N},\quad \mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbf{e}^{-1}\sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 - \mathbf{e}^{-1}\sum_{k=0}^{i} \frac{1}{k!}.$$

En observant par exemple que

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbf{e}^{-1} \neq (1-\mathbf{e}^{-1})^2 = \mathbb{P}(X = 0)\,\mathbb{P}(Y = 0),$$

il apparaît que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 7

Question 3

Le théorème de transfert donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(2^{X+Y}) &= \sum_{i,j\geqslant 0} 2^{i+j}\,\mathbb{P}(X = i, Y = j) \\ &= \mathbf{e}^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+j=k} \frac{2^{i+j}}{(i+j+1)!} \\ &= \mathbf{e}^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = \mathbf{e},\end{aligned}$$

la série double étant absolument convergente par un argument similaire à celui employé en **1.**, ce qui assure l'existence de l'espérance.

Exercice 7

Question 4

La variable $X + Y$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ avec :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{\substack{i,j\geqslant 0 \\ i+j=k}} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{\mathbf{e}^{-1}}{k!}.$$

Elle suit donc la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.

On retrouve alors le résultat de la question précédente en utilisant le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(2^{X+Y}) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\,\mathbb{P}(X + Y = k) = \mathbf{e}^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = \mathbf{e}.$$

Exercice 8

Question 1

On obtient sans difficulté la loi conjointe du couple (S,T) d'où l'on déduit celles de S et T :

$S\backslash T$	-1	0	1	Loi de S
0	0	q^2	0	q^2
1	pq	0	pq	$2pq$
2	0	p^2	0	p^2
Loi de T	pq	p^2+q^2	pq	

où l'on a noté $q = 1 - p$.

Exercice 8

Question 2

On a d'une part $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 2p$ et $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = 0$.

D'autre part, la loi conjointe du couple (S, T) donne la loi de la variable ST, à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$:

$$\mathbb{P}(ST = -1) = \mathbb{P}(S = 1, T = -1) = pq,$$
$$\mathbb{P}(ST = 0) = \mathbb{P}(S = 0, T = 0) + \mathbb{P}(S = 2, T = 0) = p^2 + q^2,$$
$$\mathbb{P}(ST = 1) = \mathbb{P}(S = 1, T = 1) = pq$$

puis son espérance $\mathbb{E}(ST) = 0$.

On est à présent en mesure de calculer

$$\operatorname{cov}(S, T) = \mathbb{E}(ST) - \mathbb{E}(S)\,\mathbb{E}(T) = 0.$$

Remarque. En observant que $X^2 = X$ et $Y^2 = Y$, on peut obtenir plus rapidement l'expression de

$$\mathbb{E}(ST) = \mathbb{E}((X + Y)(X - Y)) = \mathbb{E}(X^2 - Y^2) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = 0.$$

Remarque. On peut aussi obtenir la covariance de (S, T) à partir de la formule

$$\mathbb{V}(S + T) = \mathbb{V}(S) + 2\operatorname{cov}(S, T) + \mathbb{V}(T),$$

sachant que

$$\mathbb{V}(S + T) = \mathbb{V}(2X) = 4\,\mathbb{V}(X) = 4p(1 - p)$$

et, par indépendance de X et Y,

$$\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}(T) = \mathbb{V}(X \pm Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = 2p(1 - p).$$

Exercice 8

Question 3

Le tableau de la question **1.** met en évidence que S et T ne sont pas indépendantes : on a par exemple

$$\mathbb{P}(S = 0, T = 1) = 0$$

alors que

$$\mathbb{P}(S = 0)\,\mathbb{P}(T = 1) = pq^3 \neq 0.$$

Exercice 9

Question 1

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\operatorname{cov}(X, Y)| \leqslant \sqrt{\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)}$$

où, en notant $p = \mathbb{P}(X = 1)$,

$$\mathbb{V}(X) = p(1 - p) \leqslant \frac{1}{4}$$

et, de même, $\mathbb{V}(Y) \leqslant \frac{1}{4}$. Il en résulte que :

$$|\operatorname{cov}(X, Y)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Exercice 9

Question 2

En notant $p = \mathbb{P}(X = 1)$ et $q = \mathbb{P}(Y = 1)$, on a :

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) - pq.$$

La condition énoncée est nécessaire : si X et Y sont indépendantes, alors le cours assure que $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$.
Réciproquement, si $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$, alors $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = pq$ puis, sachant que $Y(\Omega) = \{0, 1\}$,

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = p$$

d'où

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = p - pq = p(1 - q).$$

On obtient ainsi la loi conjointe de (X, Y) :

$X\backslash Y$	0	1	Loi de X
0	$(1-p)(1-q)$	$(1-p)q$	$1-p$
1	$p(1-q)$	pq	p
Loi de Y	$1-q$	q	

et l'on vérifie sur ce tableau que X et Y sont indépendantes :

$$\forall k, l \in \{0, 1\}, \quad \mathbb{P}(X = k, Y = l) = \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = l).$$

Exercice 10

Question 1

La variable X prend ses valeurs dans $[\![1, n-1]\!]$ et Y dans $[\![2, n]\!]$. Pour $(i, j) \in [\![1, n-1]\!] \times [\![2, n]\!]$, deux cas se présentent :

- si $i \geqslant j$, l'événement $[X = i, Y = j]$ est impossible et $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0$;
- si $i < j$, l'événement $[X = i, Y = j]$ est réalisé si, et seulement si, on tire les boules numérotées i et j. Comme il y a $\binom{n}{2}$ poignées de 2 boules possibles qui sont équiprobables, on a donc :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{2}{n(n-1)}.$$

Ainsi :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n-1]\!] \times [\![2, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{2}{n(n-1)} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i \geqslant j \end{cases}.$$

On en déduit la loi de X :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad \mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=2}^{n} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}$$

puis celle de Y :

$$\forall j \in [\![2, n]\!], \quad \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(j-1)}{n(n-1)}.$$

Exercice 10

Question 2

La variable Y étant finie, elle admet des moments à tous les ordres.

En particulier, elle a pour espérance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{j=2}^{n} j\,\mathbb{P}(Y=j) = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{j=2}^{n} j(j-1) = \frac{4}{n(n-1)}\sum_{j=2}^{n}\binom{j}{2}\\ &= \frac{4}{n(n-1)}\binom{n+1}{3} = \frac{4}{n(n-1)}\,\frac{(n+1)n(n-1)}{6} = \frac{2(n+1)}{3}.\end{aligned}$$

On détermine de même, d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(Y(Y-2)\big) &= \sum_{j=2}^{n} j(j-2)\,\mathbb{P}(Y=j) = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{j=2}^{n} j(j-1)(j-2)\\ &= \frac{12}{n(n-1)}\sum_{j=3}^{n}\binom{j}{3} = \frac{12}{n(n-1)}\binom{n+1}{4} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.\end{aligned}$$

On en déduit la valeur de

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \mathbb{E}\big(Y(Y-2)\big) + 2\,\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)^2\\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{18}.\end{aligned}$$

Exercice 10

Question 3

Puisque X est à valeurs dans $[\![1,n-1]\!]$, la variable $n+1-X$ est à valeurs dans $[\![2,n]\!]$ et sa loi se déduit de celle de X : pour tout $j \in [\![2,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(n+1-X=j) = \mathbb{P}(X=n+1-j) = \frac{2(j-1)}{n(n-1)} = \mathbb{P}(Y=j).$$

Les variables $n+1-X$ et Y ont donc même loi.

Il en résulte que

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(n+1-X) = n+1-\mathbb{E}(X),$$

ce qui amène la valeur de

$$\mathbb{E}(X) = n+1-\mathbb{E}(Y) = \frac{n+1}{3}.$$

On obtient de même :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(n+1-X) = (-1)^2\,\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X)$$

d'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}.$$

Exercice 10

Question 4

D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X(Y-2)\big) &= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n-1\\ 2\leqslant j\leqslant n}} i(j-2)\,\mathbb{P}(X=i,Y=j) = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i(j-2)\\ &= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{j=2}^{n}(j-2)\sum_{i=1}^{j-1} i = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{j=3}^{n}(j-2)\frac{j(j-1)}{2}\\ &= \frac{6}{n(n-1)}\sum_{j=3}^{n}\binom{j}{3} = \frac{6}{n(n-1)}\binom{n+1}{4} = \frac{(n+1)(n-2)}{4}.\end{aligned}$$

On en déduit, d'après la formule de Kœnig-Huygens, la valeur de

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(X(Y-2)\big) + 2\,\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)\\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{36}.\end{aligned}$$

Exercice 10

Question 5

Le coefficient de corrélation entre X et Y est défini si, et seulement si, $\mathbb{V}(X) \neq 0$ et $V(Y) \neq 0$, ce qui revient ici à $n \neq 2$ c'est-à-dire à $n \geqslant 3$. Il vaut dans ce cas :

$$\varrho_{X,Y} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 11

Question 1

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement « l'événement A se réalise au cours de la k-ième expérience ». On note également $q = 1-p$.

Le couple (X,Y) est à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Réciproquement, pour $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(X=i,Y=j) = 0$ si $i \geqslant j$ alors que, si $i<j$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=i,Y=j) &= \mathbb{P}(\overline{A_1}\cap\cdots\overline{A_{i-1}}\cap A_i\cap\overline{A_{i+1}}\cap\cdots\cap\overline{A_{j-1}}\cap A_j)\\ &= \mathbb{P}(\overline{A_1})\cdots\mathbb{P}(\overline{A_{i-1}})\,\mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(\overline{A_{i+1}})\cdots\mathbb{P}(\overline{A_{j-1}})\,\mathbb{P}(A_j)\\ &= p^2q^{j-2}\end{aligned}$$

par indépendance des lancers.

La loi du couple (X,Y) est donc donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}(X=i,Y=j) = \begin{cases} p^2q^{j-2} & \text{si } i<j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

On en déduit la loi marginale de X, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\forall i \in \mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}(X=i) &= \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=j) = \sum_{j=i+1}^{\infty} p^2q^{j-2}\\ &= p^2\frac{q^{i-1}}{1-q} = pq^{i-1}.\end{aligned}$$

Il n'est pas surprenant de reconnaître une loi géométrique de paramètre p : la variable X donne le temps d'attente du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

Ainsi que celle de Y, à valeurs dans $[\![2,+\infty[\![$:

$$\begin{aligned}\forall j \geqslant 2,\quad \mathbb{P}(Y=j) &= \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=j) = \sum_{i=1}^{j-1} p^2q^{j-2}\\ &= (j-1)p^2q^{j-2}.\end{aligned}$$

Exercice 11

Question 2

La variable X, de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, admet espérance et variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

La variable Y admet également une espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=2}^{\infty} j\,\mathbb{P}(Y=j) = p^2 \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)q^{j-2} = \frac{2p^2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p}$$

car la série ci-dessus, géométrique dérivée, est absolument convergente puisque $|q| < 1$. On justifie de même l'existence

$$\mathbb{E}\big(Y(Y-2)\big) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-2)\,\mathbb{P}(Y=j) = p^2 q \sum_{j=3}^{\infty} j(j-1)(j-2)q^{j-3} = \frac{6q}{p^2},$$

d'où l'on déduit l'existence d'un moment d'ordre 2 et donc une variance pour Y :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}\big(Y(Y-2)\big) + 2\,\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{2q}{p^2}.$$

Exercice 11

Question 3

Les variables X et Y admettant chacune un moment d'ordre 2, le produit $X(Y-2)$ admet une espérance, que le théorème de transfert permet de calculer :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X(Y-2)\big) &= \sum_{i,j\geqslant 1} i(j-2)\,\mathbb{P}(X=i, Y=j) = p^2 \sum_{1\leqslant i<j} i(j-2)q^{j-2} \\ &= p^2 \sum_{j=2}^{\infty} (j-2)q^{j-2} \sum_{i=1}^{j-1} i = \frac{p^2 q}{2} \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)(j-2)q^{j-3} \\ &= \frac{p^2 q}{2} \frac{3!}{(1-q)^4} = 3\frac{q}{p^2}.\end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons, le couple (X,Y) admet une covariance donnée par la formule de Huygens :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big(X(Y-2)\big) + 2\,\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = \frac{q}{p^2}.$$

Exercice 11

Question 4

Conditionnellement à l'événement $[Y=n]$, la variable X est presque sûrement à valeurs dans $[\![1, n-1]\!]$ avec :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad \mathbb{P}_{[Y=n]}(X=i) = \frac{\mathbb{P}(X=i, Y=n)}{\mathbb{P}(Y=n)} = \frac{1}{n-1}.$$

Elle suit donc la loi uniforme sur l'intervalle $[\![1, n-1]\!]$.

Exercice 12

Question 1

Conditionnellement à l'événement $[N=j]$, la variable X donne le nombre de succès (l'usager vient pour poster une lettre) lors d'une succession de j épreuves de Bernoulli (un usager vient à la poste, pourquoi ?) indépendantes et de même paramètre p ; elle suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(j,p)$. Plus précisément,

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}_{[N=j]}(X=i) = \begin{cases} \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}.$$

Exercice 12

Question 2

Pour $i,j \in \mathbb{N}$, on a par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(X=i, N=j) = \mathbb{P}(N=j)\,\mathbb{P}_{[N=j]}(X=i)$$

d'où, d'après la question **1.** :

$$\mathbb{P}(X=i, N=j) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^j}{j!}\dbinom{j}{i} p^i(1-p)^{j-i} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}.$$

Exercice 12

Question 3

La variable X est à valeurs dans $\mathbb{N}$. On obtient sa loi à partir de la loi conjointe de (X,N) : pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=i) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=i, N=j) = \sum_{j=i}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\binom{j}{i} p^i(1-p)^{j-i} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^i}{i!} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{\big(\lambda(1-p)\big)^{j-i}}{(j-i)!} = \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!}.\end{aligned}$$

Ainsi X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$. Elle admet donc espérance et variance données par $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda p$.

Exercice 12

Question 4

Le même raisonnement (en échangeant le point de vue succès/échec et en remplaçant p par $1-p$) montre que Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}\big(\lambda(1-p)\big)$:

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y=j) = \mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}\frac{\big(\lambda(1-p)\big)^j}{j!}.$$

En remarquant que $X + Y = N$, on constate alors sur la formule ci-dessus et celles des questions **2.** et **3.** que pour tous $i,j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=i, Y=j) &= \mathbb{P}(X=i, N=i+j) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}\binom{i+j}{i}p^i(1-p)^j \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!} \times \mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}\frac{\big(\lambda(1-p)\big)^j}{j!} = \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j),\end{aligned}$$

ce qui signifie que X et Y sont indépendantes.

Exercice 12

Question 5

Puisque X et Y sont indépendantes, on a $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$ d'où

$$0 = \operatorname{cov}(X, N-X) = \operatorname{cov}(X,N) - \operatorname{cov}(X,X)$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{cov}(X,N) = \operatorname{cov}(X,X) = \mathbb{V}(X) = \lambda p.$$

Ainsi $\operatorname{cov}(X,N) > 0$: les variables X et N ont donc tendance à se situer du même côté de leurs espérances respectives. En moyenne, un afflux d'usagers engendrera un afflux de courriers à poster.

Exercice 12
Question 6

Par définition,

$$\varrho_{X,N} = \frac{\operatorname{cov}(X,N)}{\sigma(X)\sigma(N)} = \sqrt{\frac{\lambda p}{\lambda}} = \sqrt{p}.$$

Ainsi $|\varrho_{X,N}| < 1$ et N ne peut donc être fonction affine de Y.

Exercice 13
Question 1

La variable U est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ avec classiquement, par indépendance de X_1 et X_2 :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}(U \leqslant k) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant k, X_2 \leqslant k) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant k)\,\mathbb{P}(X_2 \leqslant k) = \frac{k^2}{n^2},$$

la formule étant encore valable pour $k = 0$.
On en déduit que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}(U = k) = \mathbb{P}(U \leqslant k) - \mathbb{P}(U \leqslant k-1) = \frac{2k-1}{n^2}.$$

Par décroissance de la fonction $x \longmapsto n+1-x$,

$$\begin{aligned} n+1-V &= n+1-\inf(X_1,X_2) \\ &= \sup(n+1-X_1, n+1-X_2) \\ &= \sup(Y_1,Y_2) \end{aligned}$$

où $Y_1 = n+1-X_1$ et $Y_2 = n+1-X_2$ sont deux variables indépendantes de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. La variable $n+1-V = \sup(Y_1,Y_2)$ a donc même loi que $U = \sup(X_1,X_2)$, d'où l'on déduit la loi de V : elle est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ avec :

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}(V = k) &= \mathbb{P}(n+1-V = n+1-k) \\ &= \mathbb{P}(U = n+1-k) \\ &= \frac{2n-2k+1}{n^2}. \end{aligned}$$

Exercice 13
Question 2

Les variables U et V étant finies, elles admettent des moments à tous ordres, donc en particulier espérance et variance. Pour U, il vient

$$\mathbb{E}(U) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(U=k) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$$

puis

$$\mathbb{E}(U^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2\,\mathbb{P}(U=k) = \frac{n+1}{n}\,\frac{3n^2+n-1}{6}$$

d'où

$$\mathbb{V}(U) = \mathbb{E}(U^2) - \mathbb{E}(U)^2 = \frac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2}.$$

Sachant que $n+1-V$ a même loi que U, on en déduit les valeurs de

$$\mathbb{E}(V) = n+1-\mathbb{E}(n+1-V) = n+1-\mathbb{E}(U) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

et

$$\mathbb{V}(V) = \mathbb{V}(n+1-V) = \mathbb{V}(U) = \frac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2}.$$

Exercice 13
Question 3

En remarquant que $U+V = X_1+X_2$ où X_1 et X_2 sont indépendantes, on obtient :

$$\mathbb{V}(U+V) = \mathbb{V}(X_1+X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) = \frac{n^2-1}{6}.$$

En comparant au développement

$$\mathbb{V}(U+V) = \mathbb{V}(U) + V(V) + 2\operatorname{cov}(U,V),$$

on en déduit la valeur de

$$\operatorname{cov}(U,V) = \frac{1}{2}\big(\mathbb{V}(U+V) - \mathbb{V}(U) - \mathbb{V}(V)\big) = \frac{(n^2-1)^2}{36n^2}.$$

Exercice 13
Question 4

Les variables X_1 et X_2 étant indépendantes à valeurs dans $[\![1,n]\!]$, leur somme S est à valeurs dans $[\![2,2n]\!]$ et sa loi est donnée par le produit de convolution :

$$\begin{aligned} \forall s \in [\![2,2n]\!], \quad \mathbb{P}(S = s) &= \sum_{\substack{1 \leqslant k,\ell \leqslant n \\ k+\ell = s}} \mathbb{P}(X_1 = k)\,\mathbb{P}(X_2 = \ell) \\ &= \frac{1}{n^2}\operatorname{Card}\{(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2 : k+\ell = s\} \\ &= \begin{cases} \frac{s-1}{n^2} & \text{si } s \leqslant n+1 \\ \frac{2n-s+1}{n^2} & \text{si } s \geqslant n+1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Exercice 14
Question 3

La variable $T = X - Y$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et sa loi est donnée, puisque X et Y sont indépendantes, par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(T = k) = \sum_{\substack{i,j \geqslant 1 \\ i-j=k}} \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = j).$$

On distingue deux cas :

- Si $k \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = k) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = j+k)\,\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{j=1}^{\infty} p^2 q^{2j+k-2} \\ &= p^2 q^{k-2} \sum_{j=1}^{\infty} q^{2j} = p^2 q^{k-2}\frac{q^2}{1-q^2} = \frac{p^2 q^k}{1-q^2}. \end{aligned}$$

- Si $k < 0$,

$$\mathbb{P}(T = k) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = i - k) = \sum_{i=1}^{\infty} p^2 q^{2i-k-2}$$
$$= p^2 q^{-k-2} \sum_{i=1}^{\infty} q^{2i} = p^2 q^{-k-2} \frac{q^2}{1-q^2} = \frac{p^2 q^{-k}}{1-q^2}.$$

Finalement,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(T = k) = \frac{p^2 q^{|k|}}{1-q^2}.$$

Exercice 15

Question 1.a

On note $q = 1 - p$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, A_k (resp. B_k) l'événement « le k-ième message transite par le serveur A (resp. B) ». Étant donnés deux événements E_1 et E_2, on s'autorisera à écrire E_1E_2 pour désigner leur intersection.

La variable L_1 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$[L_1 = i] = A_1A_2 \cdots A_iB_{i+1} \cup B_1B_2 \cdots B_iA_{i+1}$$

d'où, la réunion étant disjointe et les choix successifs indépendants :

$$\mathbb{P}(L_1 = i) = \mathbb{P}(A_1A_2 \cdots A_iB_{i+1}) + \mathbb{P}(B_1B_2 \cdots B_iA_{i+1}) = p^iq + q^ip.$$

On remarquera que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(L_1 = i) = q\frac{p}{1-p} + p\frac{q}{1-q} = p + q = 1,$$

ce qui prouve que L_1 est bien une variable aléatoire...

Exercice 15

Question 1.b

Vu la convergence absolue des séries géométriques dérivées de raison $p, q \in]-1, 1[$, on a :

$$\mathbb{E}(L_1) = \sum_{i=1}^{\infty} i\,\mathbb{P}(L_1 = i) = qp\sum_{i=1}^{\infty} ip^{i-1} + pq\sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1}$$
$$= qp\frac{1}{(1-p)^2} + pq\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{p^2+q^2}{pq}.$$

On établirait de même, par le théorème de transfert, l'existence de

$$\mathbb{E}\big(L_1(L_1+1)\big) = \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)i(qp^i + pq^i),$$

ce qui prouve l'existence de $\mathbb{V}(L_1)$.

Exercice 15

Question 2.a

Pour $i, j \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$[L_1 = i, L_2 = j] = A_1 \cdots A_iB_{i+1} \cdots B_{i+j}A_{i+j+1} \cup B_1 \cdots B_iA_{i+1} \cdots A_{i+j}B_{i+j+1}$$

d'où, à nouveau par incompatibilité puis indépendance :

$$\mathbb{P}(L_1 = i, L_2 = j) = p^iq^jp + q^ip^jq = p^{i+1}q^j + q^{i+1}p^j.$$

Exercice 15

Question 2.b

De la loi conjointe de (L_1, L_2), on déduit la loi de la variable L_2 : elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(L_2 = j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(L_1 = i, L_2 = j) = q^jp^2\sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1} + p^jq^2\sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1}$$
$$= q^jp^2\frac{1}{1-p} + p^jq^2\frac{1}{1-q} = q^{j-1}p^2 + p^{j-1}q^2.$$

On peut, cette fois encore, s'assurer que la définition de la variable L_2 est consistante en vérifiant que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(L_2 = j) = 1.$$

Exercice 15

Question 2.c

Il vient comme précédemment :

$$\mathbb{E}(L_2) = \sum_{j=1}^{\infty} j\,\mathbb{P}(L_2 = j) = p^2\sum_{j=1}^{\infty} jq^{j-1} + q^2\sum_{j=1}^{\infty} jp^{j-1}$$
$$= p^2\frac{1}{(1-q)^2} + q^2\frac{1}{(1-p)^2} = 2.$$

Exercice 15

Question 3

Comme précédemment, la variable L_3 est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec, pour $k \in \mathbb{N}^*$, en s'appuyant sur le système complet associé au couple (L_1, L_2) :

$$\mathbb{P}(L_3 = k) = \sum_{i,j \geqslant 1} \mathbb{P}(L_1 = i, L_2 = j, L_3 = k) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} (p^iq^jp^kq + q^ip^jq^kp)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(p^{i+k}q^2\frac{1}{1-q} + q^{i+k}p^2\frac{1}{1-p}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} (p^{i+k-1}q^2 + q^{i+k-1}p^2)$$
$$= p^kq^2\frac{1}{1-p} + q^kp^2\frac{1}{1-q} = p^kq + q^kp$$

et l'on observe que L_3 a même loi que L_1.

Exercice 15

Question 4.a

La variable L_1 admet une variance d'après **1.b.** et, pour les mêmes raisons, L_2 en admet une également. Dans ces conditions, le couple (L_1, L_2) admet une covariance.

Exercice 15

Question 4.b

L'existence de $\operatorname{cov}(L_1L_2)$ équivaut à la convergence absolue de la série double ci-dessous, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_1L_2) &= \sum_{i,j\geqslant 1} ij\,\mathbb{P}(L_1=i, L_2=j) = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(ip^{i+1}q\sum_{j=1}^{\infty} jq^{j-1} + iq^{i+1}p\sum_{j=1}^{\infty} jp^{j-1}\Big)\\ &= q\sum_{i=1}^{\infty} ip^{i-1} + p\sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = \frac{1}{pq}.\end{aligned}$$

On en déduit la valeur de

$$\operatorname{cov}(L_1,L_2) = \mathbb{E}(L_1L_2) - \mathbb{E}(L_1)\,\mathbb{E}(L_2) = \frac{-1+4p-4p^2}{pq} = -\frac{(2p-1)^2}{pq}.$$

Il apparaît que $\operatorname{cov}(L_1,L_2) \leqslant 0$ avec égalité si, et seulement si, $p=\frac{1}{2}$.

Remarque. Les variables L_1 et L_2 ne sont donc pas indépendantes pour $p \neq \frac{1}{2}$. On peut montrer qu'elles le sont pour $p=\frac{1}{2}$.

Exercice 16

Question 1

La variable B donne le nombre de succès (la boule tirée est bleue) lors d'une répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre b. Elle suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n,b)$. Elle admet espérance et variance données par

$$\mathbb{E}(B) = nb \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(B) = nb(1-b).$$

Pour les mêmes raisons, les variables R et J suivent respectivement les lois $\mathcal{B}(n,r)$ et $\mathcal{B}(n,j)$.

Exercice 16

Question 2

La variable $B+R$ compte le nombre de succès (obtenir une boule bleue ou rouge) dans une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $b+r$. Elle suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n,b+r)$ et admet à ce titre pour variance $\mathbb{V}(B+R) = n(b+r)(1-b-r)$.

Partant de

$$\mathbb{V}(B+R) = \mathbb{V}(B) + \mathbb{V}(R) + 2\operatorname{cov}(B,R),$$

on en déduit la valeur de

$$\operatorname{cov}(B,R) = \frac{1}{2}\big(\mathbb{V}(B+R) - \mathbb{V}(B) - \mathbb{V}(R)\big) = -nbr.$$

Remarque. On trouve $\operatorname{cov}(B,R) < 0$ ce qui n'est pas étonnant car si B a tendance à augmenter, R a tendance à diminuer : les variables B et R ont donc tendance à se situer de part et d'autre de leurs moyennes.

Exercice 16

Question 3

Étant donné une partie X de $[\![1,n]\!]$, on note B_X l'événement « les tirages numérotés par un élément de X renvoient tous une boule bleue » et l'on définit de même R_X et J_X.

Pour $x,y,z \in \mathbb{N}$, il s'agit de calculer $\mathbb{P}(B=x, R=y, J=z)$. Cette probabilité est bien sûr nulle si $x+y+z \neq n$. Dans le cas où $x+y+z=n$, l'événement $[B=x, R=y, J=z]$ s'écrit comme l'union disjointe des événements $B_X \cap R_Y \cap J_Z$, où X de cardinal x, Y de cardinal y et Z de cardinal z partitionnent $[\![1,n]\!]$.
Par indépendance des tirages, chaque événement $B_X \cap R_Y \cap J_Z$ a pour probabilité $b^x r^y j^z$.
Quant au choix d'un tel triplet (X,Y,Z), il revient à celui d'une partie X de $[\![1,n]\!]$ à x éléments ($\binom{n}{x}$ possibilités) et d'une partie Y de $[\![1,n]\!]\setminus X$ à y éléments ($\binom{n-x}{y}$ possibilités), après quoi $Z = [\![1,n]\!]\setminus(X\cup Y)$ est une partie complètement déterminée de $[\![1,n]\!]$ à z éléments qui complète les deux premières pour former une partition de $[\![1,n]\!]$.

On a donc dans ce cas :

$$\mathbb{P}(B=x, R=y, J=z) = \binom{n}{x}\binom{n-x}{y} b^x r^y j^z = \frac{n!}{x!y!z!} b^x r^y j^z.$$

Pour résumer, la loi du vecteur (B,J,R) est donnée par :

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{N}^3,\quad \mathbb{P}(B=x, R=y, J=z) = \begin{cases} \frac{n!}{x!y!z!} b^x r^y j^z & \text{si } x+y+z=n \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Remarque. La loi précédente est appelée *loi multinomiale* de paramètres (n,b,r).

Méthode alternative.

On peut aussi utiliser la formule des probabilités composées : pour $x,y,z\in\mathbb{N}$ tels que $x+y+z=n$, on a

$$\mathbb{P}(B=x, R=y, J=z) = \mathbb{P}(B=x)\,\mathbb{P}_{[B=x]}(R=y)\,\mathbb{P}_{[B=x,R=y]}(J=z)$$

où

- on a déjà vu que
$$\mathbb{P}(B=x) = \binom{n}{x} b^x (1-b)^{n-x} = \binom{n}{x} b^x (r+j)^{n-x},$$
- on a $\mathbb{P}_{[B=x,R=y]}(J=z) = 1$ car $x+y+z=n$,

- conditionnellement à l'événement $[B=x]$, la variable R donne le nombre de succès (apparition d'une boule rouge) lors d'un répétition de $n-x$ épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre, la proportion $\frac{r}{r+j}$ de boules rouges dans l'urne après retrait des boules bleues, si bien que
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[B=x]}(R=y) &= \binom{n-x}{y}\Big(\frac{r}{r+j}\Big)^y\Big(1-\frac{r}{r+j}\Big)^{n-x-y}\\ &= \binom{n-x}{y}\frac{r^y j^z}{(r+j)^{n-x}}.\end{aligned}$$

On retrouve ainsi le résultat précédent.

Exercice 17

Par théorème, la somme S_n de n variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ mutuellement indépendantes de lois de Poisson $\mathcal{P}(1)$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$. Dans ces conditions, le théorème de transfert assure l'existence de

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-k/n}\,\mathbb{P}(S_n=k) = \mathrm{e}^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n\mathrm{e}^{-1/n})^k}{k!} = \mathrm{e}^{n(\mathrm{e}^{-1/n}-1)}$$

puisque la série ci-dessus converge absolument comme série exponentielle.

Par ailleurs,

$$n(\mathrm{e}^{-1/n}-1) \sim n\Big(-\frac{1}{n}\Big) = -1 \longrightarrow -1, \quad n\to\infty,$$

si bien que

$$\mathbb{E}(Z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-1}.$$

Exercice 18

Question 1

Soit $n \geqslant 1$. Conditionnellement à l'événement $[N = n]$, on a $S = X_1 + \cdots + X_n$ presque sûrement. Comme chacune des variables X_i admet une espérance (pour $\mathbb{P}$), elle admet une espérance conditionnellement à $[N = n]$ et alors, par linéarité de l'espérance (pour $\mathbb{P}_{[N=n]}$) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S \mid N = n) &= \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n \mid N = n)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k \mid N = n) = n\,\mathbb{E}(X_1)\end{aligned}$$

puisque les variables $X_1, \ldots, X_n$ ont même loi et sont indépendantes de N.

Conditionnellement à l'événement $[N = 0]$, on a $S = 0$ si bien que $\mathbb{E}(S \mid N = 0) = 0$.

Exercice 18

Question 2

D'après la question **1.**, la variable S admet une espérance conditionnellement à chacun des événement du système complet associé à la variable Net la série

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(N = n)\,\mathbb{E}(|S| \mid N = n) &= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(N = n)\,\mathbb{E}(S \mid N = n)\\ &= \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(N = n) n\,\mathbb{E}(X_1)\end{aligned}$$

converge puisque N admet une espérance par hypothèse. Dans ces conditions, la formule de l'espérance totale assure que S admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)\,\mathbb{E}(S \mid N = n)\\ &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) n\Big)\,\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X_1).\end{aligned}$$

Exercice 19

Question 1

Par linéarité de l'espérance, il vient :

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p^k = p\frac{1-p^n}{1-p}$$

puisque $p \neq 1$.

De plus, les variables $X_1, \ldots, X_n$ étant mutuellement indépendantes, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S_n) &= \mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p^k(1-p^k)\\ &= p\frac{1-p^n}{1-p} - p^2\frac{1-p^{2n}}{1-p^2} = \frac{p(1-p^n)(1-p^{n+1})}{1-p^2}.\end{aligned}$$

Exercice 19

Question 2.a

La variable $Y_k = X_k X_{k+1}$ ne prenant que les valeurs 0 et 1, elle suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = 1, X_{k+1} = 1) = \mathbb{P}(X_k = 1)\,\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = p^{2k+1}$$

par indépendance de X_k et X_{k+1}.

Exercice 19

Question 2.b

Toujours par linéarité de l'espérance, on obtient donc :

$$\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} Y_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) = \sum_{k=1}^{n} p^{2k+1} = p^3\frac{1-p^{2n}}{1-p^2}.$$

Exercice 19

Question 3.a

La variable $Y_k Y_{k+1} = X_k X_{k+1}^2 X_{k+2} = X_k X_{k+1} X_{k+2}$ suit elle aussi une loi de Bernoulli, de paramètre

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_k Y_{k+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_k = 1, X_{k+1} = 1, X_{k+2} = 1)\\ &= \mathbb{P}(X_k = 1)\,\mathbb{P}(X_{k+1} = 1)\,\mathbb{P}(X_{k+2} = 1)\\ &= p^{3k+3}\end{aligned}$$

par indépendance mutuelle de X_k, X_{k+1} et X_{k+2}.

Exercice 19

Question 3.b

Quitte à échanger k et j, on peut supposer $k \leqslant j$. On distingue alors trois cas.

- Pour $j = k$, on a :
$$\mathrm{cov}(Y_k, Y_j) = \mathbb{V}(Y_k) = p^{2k+1}(1 - p^{2k+1}).$$
- Pour $j = k + 1$, on a par indépendance mutuelle de X_k, X_{k+1} et X_{k+2} :
$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(Y_k, Y_j) &= \mathbb{E}(Y_k Y_{k+1}) - \mathbb{E}(Y_k)\,\mathbb{E}(Y_{k+1})\\ &= \mathbb{E}(X_k X_{k+1} X_{k+2}) - \mathbb{E}(X_k X_{k+1})\,\mathbb{E}(X_{k+1} X_{k+2})\\ &= \mathbb{E}(X_k)\,\mathbb{E}(X_{k+1})\,\mathbb{E}(X_{k+2}) - \mathbb{E}(X_k)\,\mathbb{E}(X_{k+1})^2\,\mathbb{E}(X_{k+2})\\ &= p^{3k+3} - p^{4k+4} = p^{3k+3}(1 - p^{k+1}).\end{aligned}$$
- Pour $j \geqslant k + 2$, on a $\{k, k+1\} \cap \{j, j+1\} = \emptyset$ donc les tribus $\mathcal{A}_{Y_k} \subset \mathcal{A}_{(X_k, X_{k+1})}$ et $\mathcal{A}_{Y_j} \subset \mathcal{A}_{(X_j, X_{j+1})}$ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions, si bien que Y_k et Y_j sont indépendantes et $\mathrm{cov}(Y_k, Y_j) = 0$.

Exercice 19

Question 3.c

Il vient d'après **b.** :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(T_n) &= \mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n} Y_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(Y_k) + 2\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n} \mathrm{cov}(Y_k, Y_j)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(Y_k) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{cov}(Y_k, Y_{k+1})\\ &= \sum_{k=1}^{n} p^{2k+1}(1 - p^{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} (p^{3k+3} - p^{4k+4})\\ &= p^3\frac{1-p^{2n}}{1-p^2} - p^6\frac{1-p^{4n}}{1-p^4} + 2p^6\frac{1-p^{3n-3}}{1-p^3} - 2p^8\frac{1-p^{4n-4}}{1-p^4}.\end{aligned}$$

Exercice 20

Question 1

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, la variable X_i compte le nombre de succès (le fournisseur F_i est choisi par le consommateur) lors d'une succession de na épreuves de Bernoulli (choix du fournisseur par le consommateur) indépendantes de même paramètre $p = \frac{1}{n}$. Elle suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}\big(na, \frac{1}{n}\big)$: elle est à valeurs dans $[\![0, an]\!]$ avec

$$\forall k \in [\![0, an]\!]\,, \quad \mathbb{P}(X_i = k) = \binom{an}{k} \frac{1}{n^k}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{an-k}.$$

Elle admet espérance et variance données par :

$$\mathbb{E}(X_i) = a \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_i) = a\Big(1 - \frac{1}{n}\Big).$$

Exercice 20

Question 2.a

On a bien sûr $X_1 + \cdots + X_n = na$ d'où

$$n^2a^2 = \Big(\sum_{i=1}^n X_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} X_iX_j$$

puis, par linéarité de l'espérance :

$$n^2a^2 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2) + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} \mathbb{E}(X_iX_j). \tag{$*$}$$

La première somme contient n termes, tous égaux à

$$\mathbb{E}(X_i^2) = \mathbb{V}(X_i) + \mathbb{E}(X_i)^2 = a\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + a^2$$

et la seconde $n(n-1)$, tous égaux pour des raisons de symétrie.

La relation $(*)$ devient donc, pour tous $i \neq j$,

$$na\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + na^2 + n(n-1)\,\mathbb{E}(X_iX_j) = n^2a^2$$

c'est-à-dire

$$n(n-1)\,\mathbb{E}(X_iX_j) = a\big(an^2 - (a+1)n + 1\big) = a(n-1)(an-1),$$

d'où l'on déduit la valeur de

$$\mathbb{E}(X_iX_j) = a\Big(a - \frac{1}{n}\Big).$$

La formule de Kœnig-Huygens donne alors :

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_iX_j) - \mathbb{E}(X_i)\,\mathbb{E}(X_j) = -\frac{a}{n}.$$

Exercice 20

Question 2.b

Pour $i \neq j$, le coefficient de corrélation entre X_i et X_j vaut :

$$\varrho_{X_i,X_j} = \frac{\operatorname{cov}(X_i, X_j)}{\sigma(X_i)\sigma(X_j)} = -\frac{1}{n}\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = -\frac{1}{n-1}.$$

Pour $n = 2$, on obtient $\varrho_{X_1,X_2} = -1$, ce qui est cohérent car $X_2 = 2a - X_1$ est fonction affine de X_1.

Exercice 20

Question 3.a

Chaque variable B_i suit la loi de Bernoulli de paramètre

$$\mathbb{P}(B_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 0) = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{an}.$$

Elle admet donc pour espérance

$$\mathbb{E}(B_i) = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{an}.$$

La variable $Y = B_1 + \cdots + B_n$ admet donc pour espérance

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(B_i) = n\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{an}.$$

Exercice 20

Question 3.b

Pour $i \neq j$, la variable B_iB_j ne prend que les valeurs 0 et 1 donc suit la loi de Bernoulli de paramètre

$$\mathbb{P}(B_iB_j = 1) = \mathbb{P}(B_i = 1, B_j = 1) = \mathbb{P}(X_i = 0, X_j = 0).$$

Comme l'événement $[X_i = 0, X_j = 0]$ est réalisé si, et seulement si, chacun des an consommateurs choisit un fournisseur parmi les $n-2$ autres que i et j,

$$\mathbb{P}(X_i = 0, X_j = 0) = \Big(1 - \frac{2}{n}\Big)^{an}.$$

On a donc

$$\mathbb{E}(B_iB_j) = \Big(1 - \frac{2}{n}\Big)^{an}$$

puis

$$\operatorname{cov}(B_i, B_j) = \mathbb{E}(B_iB_j) - \mathbb{E}(B_i)\,\mathbb{E}(B_j) = \Big(1 - \frac{2}{n}\Big)^{an} - \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{2an}.$$

Exercice 20

Question 4

Il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^n B_i\Big) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(B_i) + \sum_{i\neq j} \operatorname{cov}(B_i, B_j)\\ &= n\,\mathbb{V}(B_1) + n(n-1)\operatorname{cov}(B_1, B_2)\\ &= n\Big[\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{an} - \Big(1 - \frac{2}{n}\Big)^{an}\Big] + n^2\Big[\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)^{an} - \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{2an}\Big].\end{aligned}$$