Travaux dirigés

Probabilités générales et discrètes

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2018/2019

Exercice 1

Question 1

On a équiprobabilité sur l'univers Ω_n formé des n-listes $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ d'éléments de $[\![1, n]\!]$ où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ω_i représente le numéro de la boîte dans laquelle on a rangé la i-ième boule.
L'univers Ω_n est de cardinal $\#\Omega_n = n^n$.
L'événement étudié A_n est formé des éventualités ω pour lesquelles les ω_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont deux-à-deux distincts, c'est-à-dire des arrangements de n éléments parmi n, qui sont au nombre de $n!$.
Dans ces conditions,

$$p_n = \mathbb{P}(A_n) = \frac{\#A_n}{\#\Omega_n} = \frac{n!}{n^n}.$$

Remarque. En identifiant les éléments de Ω_n à des applications de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même, ceux de A_n correspondent aux applications injectives, c'est-à-dire bijectives puisque les ensembles de départ et d'arrivée sont finis de même cardinal. Le cardinal de A_n est donc le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$.

Exercice 1

Question 2.a

D'après l'expression obtenue en **1.**, il vient :

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{n!}{n^n}\,\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

En s'appuyant sur la formule du binôme de Newton, on obtient l'inégalité classique :

$$\forall x \geqslant 0, \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \geqslant \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx$$

qui donne ici :

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2.$$

Exercice 1

Question 2.b

D'après **a.**, on a $p_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ce qui implique, par une récurrence immédiate, que $p_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} p_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il en ressort que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 2

Question 1

Si le jeu n'est pas fini au bout de $2n$ parties et si l'on note α (resp. β) le nombre de victoires de A (resp. B) au cours des $2n$ parties, alors $|\alpha - \beta| \leqslant 1$. Sachant que $\alpha + \beta = 2n$ est pair, on en déduit que $\alpha - \beta = (\alpha + \beta) - 2\beta$ est lui aussi pair et l'on a donc nécessairement $\alpha - \beta = 0$ i.e. $\alpha = \beta$: les joueurs A et B sont à égalité.

Exercice 2

Question 2

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement « le joueur A remporte la k-ième partie » (ce qui suppose que celle-ci ait bien lieu) et on définit de même B_k.

D'après la question **1.**, l'événement C_{n+1} est réalisé si, et seulement si, l'événement C_n est réalisé et A et B gagnent chacun l'une des parties numérotées $2n+1$ et $2n+2$. En d'autres termes,

$$C_{n+1} = C_n \cap \big((A_{2n+1} \cap B_{2n+2}) \cup (B_{2n+1} \cap A_{2n+2})\big)$$

mais les événements A_{2n+1}, B_{2n+1}, A_{2n+2} et B_{2n+2} ne sont pas indépendants de C_n. On peut toutefois écrire :

$$\mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(C_n)\,\mathbb{P}_{C_n}\big((A_{2n+1} \cap B_{2n+2}) \cup (B_{2n+1} \cap A_{2n+2})\big).$$

On poursuit le calcul en utilisant l'incompatibilité des événements $A_{2n+1} \cap B_{2n+2}$ et $B_{2n+1} \cap A_{2n+2}$:

$$p_{n+1} = p_n\big(\mathbb{P}_{C_n}(A_{2n+1} \cap B_{2n+2}) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{2n+1} \cap A_{2n+2})\big)$$

puis l'indépendance de A_{2n+1} et B_{2n+2} conditionnellement à C_n (c'est-à-dire sachant que les parties $2n+1$ et $2n+2$ sont jouées) :

$$p_{n+1} = p_n\big(\mathbb{P}_{C_n}(A_{2n+1})\,\mathbb{P}_{C_n}(B_{2n+2}) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{2n+1})\,\mathbb{P}_{C_n}(A_{2n+2})\big) = \varrho p_n$$

où $\varrho = 2p(1-p)$.

La suite (p_n) est donc géométrique de raison ϱ et de premier terme $p_0 = 1$ d'où l'on déduit que $p_n = \varrho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Question 3

On note V^A l'événement « A emporte la victoire » et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, V_n^A l'événement « A emporte la victoire au bout de $2n$ parties ».

D'après la question **1.**, l'événement V_n^A est réalisé si, et seulement si, les joueurs sont à égalité après $2n-2$ parties puis A remporte les deux parties suivantes. Pour les mêmes raisons qu'en **2.**, on a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_n^A) &= \mathbb{P}(C_{n-1} \cap A_{2n-1} \cap A_{2n}) \\ &= \mathbb{P}(C_{n-1})\,\mathbb{P}_{C_{n-1}}(A_{2n-1})\,\mathbb{P}_{C_{n-1}}(A_{2n}) \\ &= p_{n-1}p^2 = p^2\varrho^{n-1}.\end{aligned}$$

Étant entendu, pour des raisons évidentes, que

$$V^A = \bigcup_{n\geqslant 1} V_n^A$$

où l'union est disjointe, il vient :

$$\mathbb{P}(V^A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(V_n^A) = \sum_{n=1}^{\infty} p^2 \varrho^{n-1} = \frac{p^2}{1-\varrho}.$$

Exercice 2

Question 4

On montrerait de même que l'événement V^B « le joueur B est victorieux » a pour probabilité

$$\mathbb{P}(V^B) = \frac{(1-p)^2}{1-\varrho}.$$

Les deux événements V^A et V^B sont bien entendu incompatibles et l'on a donc d'après les formules précédentes :

$$\mathbb{P}(V^A \cup V^B) = \frac{p^2 + (1-p)^2}{1-\varrho} = 1.$$

L'événement $V^A \cup V^B$, qui se produit si, et seulement si, l'un des joueurs A et B finit par l'emporter, est donc certain.

Exercice 4

Question 1

Pour $k \in [\![0, N]\!]$, on note U_k l'événement « choisir l'urne k », de probabilité $\mathbb{P}(U_k) = \frac{1}{N+1}$ puisque l'urne est choisie au hasard parmi N. Les événements $U_0, \ldots, U_N$ formant un système complet, la probabilité de l'événement A_N « obtenir n boules blanches au cours des n tirages » est donnée par :

$$\mathbb{P}(A_N) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(U_k)\,\mathbb{P}_{U_k}(A_N)$$

d'après la formule des probabilités totales. Or, pour $k \in [\![0, N]\!]$, si l'événement U_k est réalisé, alors les n tirages sont indépendants et amènent chacun une boule blanche avec probabilité $\frac{k}{N}$, d'où :

$$\mathbb{P}_{U_k}(A_N) = \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(A_N) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Exercice 4

Question 2

On peut écrire $\mathbb{P}(A_N) = \frac{N}{N+1} S_N$ où

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

est une somme de Riemann associée à la fonction $f : x \longmapsto x^n$ sur $[0,1]$. La fonction f étant continue sur le segment $[0,1]$, on a par théorème

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

En conclusion,

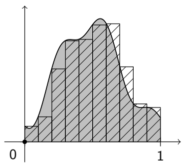
$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(A_N) = \frac{1}{n+1}.$$

Rappels sur les sommes de Riemann (zoom)

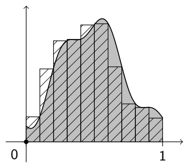
Théorème (Sommes de Riemann ou méthode des rectangles)

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$



rectangles gauche



rectangles droite

Rappels sur les sommes de Riemann

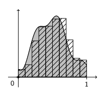
Théorème (Sommes de Riemann ou méthode des rectangles)

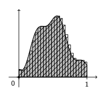
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On a :

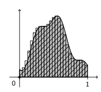
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

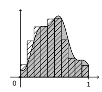
En particulier, si f est continue sur $[0,1]$, on a :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$


rectangles gauche
$n = 10$


rectangles gauche
$n = 25$


rectangles droite
$n = 25$


rectangles droite
$n = 10$

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement P_n : « le n-ième lancer renvoie pile » a pour probabilité p. Le théorème de la limite monotone assure que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant 1} \overline{P_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{P_k}\right)$$

c'est-à-dire, puisque les événements P_n, $n \in \mathbb{N}$, sont mutuellement indépendants :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant 1} \overline{P_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{P_k}) = \lim_{n\to\infty} (1-p)^n = 0.$$

L'événement

$$\overline{\bigcap_{n\geqslant 1} \overline{P_n}} = \bigcup_{n\geqslant 1} P_n$$

est donc certain, or cet événement est réalisé si, et seulement si, l'un des lancers renvoie pile, d'où le résultat.

Exercice 6

Question 1

Pour tout $k \geqslant 1$, on note C_k l'événement « le candidat est invité à répondre à la k-ième question et y apporte une réponse correcte ».
La variable X est à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ car le candidat répond presque sûrement correctement à la première question.
Pour $k \geqslant 2$, l'événement $[X = k]$ est réalisé si, et seulement si, le candidat apporte une réponse correcte aux $k-1$ premières questions et une réponse incorrecte à la k-ième :

$$[X = k] = C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_{k-1} \cap \overline{C_k}.$$

D'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(C_1)\,\mathbb{P}_{C_1}(C_2)\,\mathbb{P}_{C_1\cap C_2}(C_2)\cdots\mathbb{P}_{C_1\cap\cdots\cap C_{k-2}}(C_{k-1})\,\mathbb{P}_{C_1\cap\cdots\cap C_{k-1}}(\overline{C_k}).$$

Or, pour $j \geqslant 2$, si l'événement $C_1 \cap \cdots \cap C_{j-1}$ est réalisé, i.e. si le candidat est invité à répondre à la j-ième question, alors l'événement C_j est réalisé avec probabilité $\frac{1}{j}$ par hypothèse :

$$\mathbb{P}_{C_1 \cap \cdots \cap C_{j-1}}(C_j) = \frac{1}{j}.$$

On a donc pour $k \geqslant 2$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \Big(\prod_{j=2}^{k-1} \frac{1}{j}\Big)\Big(1 - \frac{1}{k}\Big) = \frac{1}{(k-1)!}\Big(1 - \frac{1}{k}\Big) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}.$$

Remarque. Il apparaît que

$$\sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\Big) = 1,$$

ce qui légitime la définition de la *variable aléatoire* X : bien qu'on ne lui ait pas attribué de valeur lorsque le candidat répond correctement à toutes les questions, cet événement ne se produit presque jamais.

Exercice 6

Question 2

Les séries ci-dessous convergent absolument par opérations sur les séries exponentielles, si bien que X admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=2}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=2}^{\infty} k\Big(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\Big)\\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{(k-1)!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathbf{e}.\end{aligned}$$

Exercice 7

Question 1

La distribution proposée est positive avec, d'après la formule d'absorption :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} = \frac{a}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \frac{a}{n+1}(2^{n+1} - 1).$$

Puisque c'est une loi de probabilité, la somme précédente est égale à 1 si bien que

$$a = \frac{n+1}{2^{n+1} - 1}.$$

Exercice 7

Question 2

D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(X+1) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\,\mathbb{P}(X = k) = a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = a2^n$$

d'où

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X+1) - 1 = a2^n - 1 = \frac{(n-1)2^n + 1}{2^{n+1} - 1}.$$

Exercice 7

Question 3

Toujours par tranfert,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X(X+1)\big) &= \sum_{k=0}^{n} k(k+1)\,\mathbb{P}(X = k) = a \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\\ &= a \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = an \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = an2^{n-1}\end{aligned}$$

d'où, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big(X(X+1)\big) - \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(n+1)2^{n-1}(2^{n+1} - n - 2)}{(2^{n+1} - 1)^2}.$$

Exercice 8

Question 1

La variable aléatoire N donne le temps d'attente du premier succès (apparition d'un « pile ») lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $\frac{1}{2}$. Elle suit donc une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2}\Big)^{n-1} = \frac{1}{2^n}$$

et admet espérance et variance données par $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) = 2$.

Exercice 8

Question 2.a

Si, pour un entier $n \geqslant 1$ donné, l'événement $[N = n]$ est réalisé, alors la variable X compte le nombre de succès (apparition de « pile ») dans une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $\frac{1}{2}$. La variable X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ pour la probabilité $\mathbb{P}_{[N=n]}$: elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}_{[N=n]}(X = k) = \binom{n}{k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k\Big(1 - \frac{1}{2}\Big)^{n-k} = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$$

alors bien sûr que $\mathbb{P}_{[N=n]}(X = k) = 0$ pour $k > n$.

Exercice 8

Question 2.b

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Conditionnellement à l'événement $[N = n]$, la variable X suit la loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ donc admet pour espérance

$$\mathbb{E}(X \,|\, N = n) = \frac{n}{2}.$$

Puisque la série ci-dessous (géométrique dérivée de raison appartenant à $]-1, 1[$) converge et que $X \geqslant 0$, la formule de l'espérance totale peut être appliquée au système complet associé à la variable N et donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)\,\mathbb{E}(X \,|\, N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} n\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1} = \frac{1}{4}\frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2} = 1.\end{aligned}$$

Exercice 8

Question 3

La variable X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable N donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)\,\mathbb{P}_{[N=n]}(X=k) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{2n}} \\ &= \frac{1}{4^k k!} \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \\ &= \frac{1}{4^k k!} \frac{k!}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^{k+1}} = \frac{4}{3^{k+1}}.\end{aligned}$$

Le cas $k=0$ doit être traité à part :

$$\mathbb{P}(X=0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1 = \frac{1}{3}.$$

Remarque. On peut vérifier que $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1$.

Vu la convergence absolue des séries géométriques dérivées de raison appartenant à $]-1,1[$, X admet une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k}{3^{k+1}} = \frac{4}{9} \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{4}{9} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = 1.$$

On justifie de même l'existence de :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X(X+1)\big) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)\,\mathbb{P}(X=k) = \frac{4}{9} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{4}{9} \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = 3\end{aligned}$$

d'où l'on déduit celle de

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}\big(X(X+1)\big) - \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = 1.$$

Exercice 9

Question 1

On suppose $r=1$ et on introduit les événements B_k : « le k-ième tirage renvoie la boule blanche », $1 \leqslant k \leqslant n$.
La variable X prend ses valeurs dans $[\![1,N]\!]$ avec

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{N},$$

puis

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}\big(\overline{B_1} \cap B_2\big) = \mathbb{P}\big(\overline{B_1}\big)\,\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{N-1}{N}\frac{1}{N-1} = \frac{1}{N}$$

et, plus généralement pour $k \in [\![2,N]\!]$ d'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}\big(\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k\big) \\ &= \mathbb{P}\big(\overline{B_1}\big)\,\mathbb{P}_{\overline{B_1}}\big(\overline{B_2}\big)\,\mathbb{P}_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}}\big(\overline{B_3}\big)\cdots\mathbb{P}_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-2}}}\big(\overline{B_{k-1}}\big)\,\mathbb{P}_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}}(B_k) \\ &= \frac{N-1}{N}\frac{N-2}{N-1}\frac{N-3}{N-2}\cdots\frac{N-k+1}{N-k+2}\frac{1}{N-k+1} = \frac{1}{N}\end{aligned}$$

En conclusion, X suit la loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$. Elle admet donc espérance et variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{N+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{N^2-1}{12}.$$

Dans le cas où $r=N$, la variable X est constante égale à N. Elle admet espérance et variances données par :

$$\mathbb{E}(X) = N \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 0.$$

Exercice 9

Question 2.a

La variable X est à valeurs dans $[\![r,N]\!]$.

Exercice 9

Question 2.b

On peut considérer qu'on a équiprobabilité sur l'univers Ω des suites formées de N termes parmi B ou $\overline{B}$ (signifiant blanc ou noir) dont exactement r sont égaux à B. Choisir une telle suite revient à déterminer l'emplacement des r termes B parmi les N positions possibles. Elles sont donc au nombre de $\binom{N}{r}$.

Pour $k \in [\![r,N]\!]$ donné, l'événement $[X=k]$ est réalisé si, et seulement si, la suite donnant le résultat de l'expérience contient $r-1$ termes B avant la k-ième position, un terme B en k-ième position puis seulement des termes $\overline{B}$. Ces suites sont au nombre de $\binom{k-1}{r-1}$: il y en a autant que de façons de choisir l'emplacement des $r-1$ premiers termes B parmi les $k-1$ premières positions. Sa probabilité vaut donc :

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$

Exercice 9

Question 3

La variable finie X admet une espérance donnée, d'après la formule d'absorption, par

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^{N} k\binom{k-1}{r-1} = \frac{r}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^{N} \binom{k}{r} = \frac{r}{\binom{N}{r}} \binom{N+1}{r+1} = \frac{r(N+1)}{r+1}$$

où la formule

$$\forall N \geqslant r, \quad \sum_{k=r}^{N} \binom{N}{r} = \binom{N+1}{r+1}$$

peut être justifiée par récurrence sur $N \geqslant r$ ou par un raisonnement combinatoire (dénombrer l'ensemble des suites de $\{B,\overline{B}\}^{N+1}$ contenant $r+1$ termes B en détaillant selon la position du dernier).

Exercice 10
Question 1

On a $Z_n = \sup(X_1, \dots, X_n)$ où, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, X_j est le numéro de la boule obtenue au j-ième tirage. Par hypothèse, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ suivent toutes une loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$ et sont indépendantes puisque les tirages sont effectués avec remise.

Pour $k \in [\![1, N]\!]$, on a par indépendance de $X_1, \dots, X_n$:

$$\mathbb{P}(Z_n \leqslant k) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant k, \dots, X_n \leqslant k) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j \leqslant k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

La variable aléatoire Z_n étant à valeurs dans $[\![0, N]\!]$, on notera que la formule précédente est encore valable pour $k = 0$. On peut donc écrire, pour $k \in [\![1, N]\!]$:

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(Z_n \leqslant k) - \mathbb{P}(Z_n \leqslant k-1) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n.$$

Exercice 10
Question 2.a

La variable aléatoire Z_n étant finie, elle admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_n) &= \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(Z_n = k) = \sum_{k=1}^{N} k\left(\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n\right) \\ &= \frac{1}{N^n}\left(\sum_{k=1}^{N} k^{n+1} - \sum_{k=2}^{N} k(k-1)^n\right) = \frac{1}{N^n}\left(\sum_{k=1}^{N} k^{n+1} - \sum_{k=1}^{N-1} (k+1)k^n\right) \\ &= \frac{1}{N^n}\left(N^{n+1} - \sum_{k=1}^{N-1} k^n\right) = N - \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n.\end{aligned}$$

Exercice 10
Question 2.b

On a donc $\mathbb{E}(Z_n) = N(1 - S_N)$ où

$$S_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n$$

est une somme de Riemann associée à la fonction $f : x \longmapsto x^n$ sur $[0, 1]$. La fonction f étant continue sur le segment $[0, 1]$, on a par théorème

$$\lim_{N \to \infty} S_N = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

Il en résulte que

$$\mathbb{E}(Z_n) \sim N\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}N, \quad N \to \infty.$$

Exercice 11
Question 1

Première méthode

On développe :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}\big((X-a)^2\big) = \mathbb{E}(X^2 - 2aX + a^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2a\,\mathbb{E}(X) + a^2$$

puis on étudie la fonction $a \longmapsto \mathbb{E}\big((X-a)^2\big)$. C'est une fonction polynomiale du second degré qui atteint son minimum pour $a = \mathbb{E}(X)$, égal à

$$\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}(X))^2\big] = \mathbb{V}(X).$$

Ainsi,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{V}(X) \leqslant \mathbb{E}\big((X-a)^2\big).$$

Remarque. Le résultat peut être démontré directement en écrivant, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X-a) = \mathbb{E}\big((X-a)^2\big) - \mathbb{E}(X-a)^2 \leqslant \mathbb{E}\big((X-a)^2\big).$$

Deuxième méthode

Le résultat peut être démontré directement : en posant $m = \mathbb{E}(X)$ il vient, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(X-a)^2 &= \big((X-m) + (m-a)\big)^2 \\ &= (X-m)^2 + 2(X-m)(m-a) + (m-a)^2\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big((X-a)^2\big) &= \mathbb{E}\big((X-m)^2\big) + 2(m-a)\,\mathbb{E}(X-m) + (m-a)^2 \\ &= \mathbb{V}(X) + (m-a)^2\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}(X-m) = \mathbb{E}(X) - m = 0$. Il est alors clair que la fonction est minimale pour $a = m$ c'est-à-dire $a = \mathbb{E}(X)$, de valeur $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 11
Question 2

La question précédente assure que

$$\mathbb{V}(X) \leqslant \mathbb{E}\big((X-\alpha)^2\big) \leqslant \mathbb{E}\big((\beta-\alpha)^2\big) = (\beta-\alpha)^2$$

car $0 \leqslant X - \alpha \leqslant \beta - \alpha$.

Remarque. On peut avoir mieux en écrivant :

$$\mathbb{V}(X) \leqslant \mathbb{E}\left[\left(X - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right] \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}$$

sachant que $\left|X - \frac{\alpha+\beta}{2}\right| \leqslant \frac{\beta-\alpha}{2}$.

Exercice 12
Question 1.a

Chacune des variables X_1 et X_2 donne le temps d'attente du premier succès (obtenir un 6) dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = \frac{1}{6}$, et suit donc à ce titre une loi géométrique de paramètre p.

Exercice 12
Question 1.b

Pour $k = 0$ tout d'abord, on a $\mathbb{P}(X_i \leqslant k) = 0$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(X_i \leqslant k) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X_i = j) = \sum_{j=1}^{k} pq^{j-1} = p\frac{1-q^k}{1-q} = 1 - q^k$$

où l'on a posé $q = 1 - p = \frac{5}{6}$. On peut remarquer que cette formule est encore valable pour $k = 0$.

Exercice 12

Question 2.a

On a $X = \sup(X_1, X_2)$ donc, pour $k \in \mathbb{N}$, l'événement $[X \leqslant k]$ est réalisé si, et seulement si, $X_i \leqslant k$ pour tout $i \in \{1, 2\}$. En d'autres termes,

$$[X \leqslant k] = [X_1 \leqslant k] \cap [X_2 \leqslant k]$$

d'où :

$$\mathbb{P}(X \leqslant k) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant k, X_2 \leqslant k) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant k)\,\mathbb{P}(X_2 \leqslant k)$$

par indépendance des résultats du premier et du deuxième dé. Ainsi, d'après **1.b.**,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X \leqslant k) = (1 - q^k)^2.$$

Exercice 12

Question 2.b

La variable X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec, pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'union disjointe

$$[X \leqslant k - 1] \cup [X = k] = [X \leqslant k]$$

d'où l'on déduit que

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k - 1).$$

Dès lors, vu la question **1.b.** (même si $k = 1$) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= (1 - q^k)^2 - (1 - q^{k-1})^2 = (q^{k-1} - q^k)(2 - q^k - q^{k-1}) \\ &= pq^{k-1}(2 - q^k - q^{k-1}) = 2pq^{k-1} - pq^{2k-1} - pq^{2k-2}.\end{aligned}$$

Exercice 12

Question 2.c

La variable X admet une espérance car la série ci-dessous est absolument convergente, par opérations sur les séries géométriques dérivées, toutes absolument convergentes car de raison appartenant à $]-1, 1[$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\big(2pq^{k-1} - pq^{2k-1} - pq^{2k-2}\big) \\ &= 2p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} - p(q+1)\sum_{k=1}^{\infty} k(q^2)^{k-1} \\ &= \frac{2p}{(1-q)^2} - \frac{p(q+1)}{(1-q^2)^2} = \frac{96}{11} \simeq 8{,}7.\end{aligned}$$

Exercice 14

Question 1

La variable $Y = \frac{1}{X+1}$ étant finie, elle admet une espérance donnée, d'après le théorème de transfert, par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}x^k \quad \text{où } x = \frac{p}{1-p} > 0.\end{aligned}$$

On peut envisager plusieurs méthodes de calcul :

Première méthode

D'après la formule d'absorption :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \frac{(1-p)^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}x^k = \frac{(1-p)^n}{(n+1)x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}x^{k+1} \\ &= \frac{(1-p)^n}{(n+1)x}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k = \frac{(1-p)^n}{(n+1)x}\big((1+x)^{n+1} - 1\big).\end{aligned}$$

Deuxième méthode

En remarquant que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x t^k \,\mathrm{d}t,$$

il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \frac{(1-p)^n}{x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^x t^k\,\mathrm{d}t = \frac{(1-p)^n}{x}\int_0^x\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k\Big)\mathrm{d}t \\ &= \frac{(1-p)^n}{x}\int_0^x (1+t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{(1-p)^n}{x}\,\frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1}.\end{aligned}$$

Par l'une ou l'autre méthode, on obtient :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

Exercice 14

Question 2

Pour les mêmes raisons, la variable $Z = 2^X$ admet pour espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \sum_{k=0}^{n} 2^k\,\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= (1-p)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big(\frac{2p}{1-p}\Big)^k = (1-p)^n\Big(1 + \frac{2p}{1-p}\Big)^n = (1+p)^n.\end{aligned}$$

Exercice 15

La variable Y étant finie, elle admet une espérance donnée, d'après la formule de l'espérance totale appliquée au système complet d'événements $\{[X = 0], [X > 0]\}$, par :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(X = 0)\,\mathbb{E}(Y \mid X = 0) + P(X > 0)\,\mathbb{E}(Y \mid X > 0)$$

où, conditionnellement à $[X = 0]$, la variable Y suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, si bien que

$$\mathbb{E}(Y \mid X = 0) = \frac{n+1}{2}.$$

Conditionnellement à $[X > 0]$, on a $Y = X$ si bien que $\mathbb{E}(Y \mid X > 0) = \mathbb{E}(X \mid X > 0)$. Pour calculer ce terme, on peut revenir à la définition :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 0)\,\mathbb{E}(X \mid X > 0) &= \mathbb{P}(X > 0)\sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}_{[X>0]}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}([X > 0] \cap [X = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X) = np\end{aligned}$$

car $[X = k] \subset [X > 0]$ pour $k \geqslant 1$, ou utiliser de nouveau la formule de l'espérance totale, cette fois à la variable X :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{P}(X = 0)\,\mathbb{E}(X \mid X = 0) + \mathbb{P}(X > 0)\,\mathbb{E}(X \mid X > 0) \\ &= \mathbb{P}(X > 0)\,\mathbb{E}(X \mid X > 0).\end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\mathbb{E}(Y) = (1-p)^n\frac{n+1}{2} + np.$$

Exercice 16

Question 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, la variable aléatoire X est presque sûrement finie (ne prend que les valeurs $-n$ et n) conditionnellement à A_n et admet donc à ce titre une espérance pour la probabilité $\mathbb{P}_{A_n}$:

$$\mathbb{E}\,(X\,|\,A_n) = n\,\mathbb{P}_{A_n}(X = n) - n\,\mathbb{P}_{A_n}(X = -n).$$

Puis, étant donné que $[X = n] \subset A_n$,

$$\mathbb{P}_{A_n}(X = n) = \frac{\mathbb{P}([X = n] \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_n)} = \frac{P(X = n)}{\mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X = -n)} = \frac{1}{2}$$

et de même $\mathbb{P}_{A_n}(X = -n) = \frac{1}{2}$.
On en déduit la valeur de $\mathbb{E}\,(X\,|\,A_n) = 0$ et il en découle la convergence évidente de la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{E}\,(X\,|\,A_n)$.

Exercice 16

Question 2

Il s'agit d'examiner la convergence de la série positive

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |n|\,\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |n|\,\frac{1}{|n|\,(|n| + 1)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n| + 1}, \qquad (*)$$

qui est divergente par comparaison à la série harmonique :

$$\frac{1}{|n| + 1} \sim \frac{1}{n} \geqslant 0, \quad n \to \infty.$$

La variable aléatoire X n'admet donc pas d'espérance.

Remarque. L'argument précédent établit en fait la divergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} u_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad u_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La divergence de la série $(*)$ s'en déduit car :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{|n| + 1}.$$

Exercice 18

Question 1

La variable X donne le temps d'attente du premier succès (apparition d'un « pile ») dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Elle suit donc une loi géométrique de paramètre p : elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$$

où l'on a noté $q = 1 - p$, et admet espérance et variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Exercice 18

Question 2.a

La variable $|Y|$ indique le gain obtenu par le vainqueur. Elle prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Conditionnellement à l'événement $[X = r]$, la variable $|Y|$ donne le temps d'attente du r-ième succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. D'après l'exercice 25, elle suit donc la loi de Pascal $\mathcal{P}(r, p)$: elle est à valeurs dans $[\![r, +\infty[\![$ avec :

$$\forall k \geqslant r, \quad \mathbb{P}_{[X=r]}(|Y| = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

La valeur absolue de Y indique le gain obtenu par le vainqueur alors que son signe indique le vainqueur. Or, s'il y a un vainqueur après le k-ième lancer, il s'agit nécessairement de A si k est impair et de B si k est pair, de sorte que $[|Y| = k] = [Y = (-1)^{k+1}k]$.
La variable Y prend ainsi ses valeurs dans $\{(-1)^{k+1}k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ avec :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}_{[X=r]}\big(Y = (-1)^{k+1}k\big) &= \mathbb{P}_{[X=r]}(|Y| = k) \\ &= \begin{cases} \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} & \text{si } k \geqslant r \\ 0 & \text{si } k < r \end{cases}. \end{aligned}$$

Exercice 18

Question 2.b

Toujours d'après l'exercice 25,

$$\mathbb{E}\,(|Y|\,|\,X = r) = \frac{r}{p}.$$

Exercice 18

Question 2.c

Puisque $|Y|$ admet une espérance conditionnellement à l'événement $[X = r]$, il en va de même de Y avec :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,(Y\,|\,X = r) &= \sum_{k=r}^{\infty} (-1)^{k+1} k\, \mathbb{P}_{[X=r]}\big(Y = (-1)^{k+1}k\big) \\ &= \sum_{k=r}^{\infty} (-1)^{k+1} k \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \\ &= (-1)^{r+1} r p^r \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} (p-1)^{k-r} = \frac{(-1)^{r+1} r p^r}{(2-p)^{r+1}} \end{aligned}$$

d'après la formule d'absorption et celle du binôme négatif.

Exercice 18

Question 3

D'après les questions précédentes, la variable Y admet une espérance conditionnellement à $[X = r]$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et la série

$$\sum_{r\geqslant 1} \mathbb{P}(X = r)\,\mathbb{E}\,(|Y|\,|\,X = r) = \sum_{r\geqslant 1} r(1-p)^{r-1},$$

géométrique dérivée de raison $1 - p \in]-1, 1[$, est convergente.
Dans ces conditions, on peut donc appliquer la formule de l'espérance totale au système complet associé à la variable X, d'après laquelle Y admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = r)\,\mathbb{E}\,(Y\,|\,X = r) = \sum_{r=1}^{\infty} p(1-p)^{r-1} \frac{(-1)^{r+1} r p^r}{(2-p)^{r+1}} \\ &= \frac{p^2}{(2-p)^2} \sum_{r=1}^{\infty} r \left(\frac{p(p-1)}{2-p}\right)^{r-1} = \frac{p^2}{(2-p^2)^2}. \end{aligned}$$

Exercice 19

Les variables X et Y donnant le nombre de pile dans chacune des deux séries suivent toutes deux la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ car elles donnent le nombre de succès (apparition de pile) lors d'une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès $\frac{1}{2}$.

On décompose l'événement considéré :

$$[X = Y] = \bigcup_{k=0}^{n} [X = k] \cap [Y = k]$$

où l'union est disjointe. Il en résulte, par indépendance des lancers des jeux des résultats de chaque joueur :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k, Y = k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = k)$$

et donc :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

On conclut en utilisant la formule de Vandermonde (hors-programme mais très classique) : pour $a, b \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \in [\![0, a+b]\!], \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

qu'on peut établir par un raisonnement combinatoire. Soit en effet E un ensemble de cardinal $a + b$. On considère une partie A de E de cardinal a et on note B son complémentaire, de cardinal b.
Pour $n \in [\![0, a+b]\!]$ donné, le coefficient binomial $\binom{a+b}{n}$ représente le nombre de parties de E à n éléments. L'ensemble $\mathcal{P}_n(E)$ de ces parties peut être décomposé en l'union disjointe suivante :

$$\mathcal{P}_n(E) = \bigcup_{k=0}^{n} \{X \in \mathcal{P}_n(E) : \mathrm{Card}(X \cap A) = k\}.$$

Puis, pour $k \in [\![0, n]\!]$ donné, choisir une partie de E de cardinal n formée d'exactement k éléments de A revient à choisir les k éléments qui la composent issus de A (ce qui représente $\binom{a}{k}$ possibilités) puis les $n - k$ éléments de B qui viennent s'y ajouter (ce qui représente $\binom{b}{n-k}$ possibilités). Il y a donc $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ telles parties, ce qui achève la démonstration.

En appliquant la formule de Vandermonde à $a = b = n$, on obtient la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

qui permet d'achever l'exercice :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

Exercice 20

Question 1

Pour commencer, on calcule

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X > k) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant k) = 1 - \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X = j)$$
$$= 1 - \sum_{j=1}^{k} pq^{j-1} = 1 - p\frac{1 - q^k}{1 - q} = q^k$$

où l'on a posé $q = 1 - p$.

Pour $n, h \in \mathbb{N}^*$, on a donc, étant donné que $[X > n + h] \subset [X > n]$:

$$\mathbb{P}_{[X>n]}(X > n + h) = \frac{\mathbb{P}(X > n + h)}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{q^{n+h}}{q^n} = q^h = \mathbb{P}(X > h).$$

Exercice 20

Question 2.a

Pour $n, h \in \mathbb{N}^*$, on a par hypothèse :

$$\mathbb{P}_{[X>n]}(X > n + h) = \frac{\mathbb{P}(X > n + h)}{\mathbb{P}(X > n)} = \mathbb{P}(X > h)$$

d'où, pour $h = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X > n + 1) = \mathbb{P}(X > 1)\,\mathbb{P}(X > n) = q\,\mathbb{P}(X > n)$$

et la suite $\big(\mathbb{P}(X > n)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison $q = \mathbb{P}(X > 1)$.

Exercice 20

Question 2.b

Il résulte de la question **a.** que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X > n) = q^{n-1}\,\mathbb{P}(X > 1) = q^n.$$

On note que la formule précédente est encore valable pour $n = 0$ puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ par hypothèse.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'union disjointe

$$[X > n - 1] = [X = n] \cup [X > n]$$

donne alors (même pour $n = 1$) :

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > n - 1) - \mathbb{P}(X > n) = q^{n-1} - q^n = (1 - q)q^{n-1} = pq^{n-1}$$

où $p = 1 - q$. La variable X suit donc la loi géométrique de paramètre p.

Exercice 25

Question 1.a

La variable X_1 donne le temps d'attente du premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Elle suit donc une loi géométrique de paramètre p : elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$$

où l'on a noté $q = 1 - p$, et admet espérance et variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Exercice 25

Question 1.b

Le r-ième succès ne peut advenir avant la r-ième épreuve. La variable X_r est donc à valeurs dans $[\![r, +\infty[\![$. On verra réciproquement dans la question suivante que toutes ces valeurs peuvent être prises par X_r.

Exercice 25

Question 1.c

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement « la k-ième épreuve est un succès ».

Première méthode

Pour $k \geqslant r$ donné, l'événement $[X_r = k]$ se produit si, et seulement si, la k-ième épreuve est un succès et, parmi les $k-1$ précédentes, $r-1$ sont des succès et les $k-1-(r-1) = k-r$ autres sont des échecs.
L'événement $[X_r = k]$ s'écrit donc comme l'union disjointe des événements

$$A_I = \Big(\bigcap_{\substack{1\leqslant i\leqslant k-1\\ i\in I}} S_i\Big) \cap \Big(\bigcap_{\substack{1\leqslant i\leqslant k-1\\ i\notin I}} \overline{S_i}\Big) \cap S_k, \qquad (*)$$

où I parcourt l'ensemble des parties de $[\![1, k-1]\!]$ de cardinal $r-1$. Par indépendance des événements S_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, chacun des événements $(*)$ a pour probabilité $\mathbb{P}(A_I) = p^r q^{k-r}$. D'où finalement l'expression de :

$$\mathbb{P}(X_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}.$$

Exercice 25

Question 2.a

Un changement d'indice donne, vu la somme d'une série géométrique dérivée :

$$\begin{aligned}\sum_{k=r}^{\infty} \mathbb{P}(X_r = k) &= \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)}{(r-1)!} p^r q^{k-r}\\ &= \frac{p^r}{(r-1)!} \sum_{k=r-1}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-(r-1)+1) q^{k-(r-1)}\\ &= \frac{p^r}{(r-1)!} \frac{(r-1)!}{(1-q)^r} = 1.\end{aligned}$$

Ainsi la variable X_r est bien définie sur un événement de probabilité 1, ce qui légitime sa définition. En d'autres, termes, l'événement « le r-ième pile ne se produit jamais », sur lequel X_r n'est pas définie, est négligeable.

Exercice 25

Question 2.b

La série ci-dessous converge absolument comme série géométrique de raison $q \in]-1, 1[$, ce qui établit l'existence de $\mathbb{E}(X)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=r}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X_r = k) = \frac{p^r}{(r-1)!} \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1) q^{k-r}\\ &= \frac{p^r}{(r-1)!} \frac{r!}{(1-q)^{r+1}} = \frac{r}{p}.\end{aligned}$$

Exercice 25

Question 2.c

On calcule comme précédemment, d'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X_r(X_r+1)\big) &= \sum_{k=r}^{\infty} (k+1)k\,\mathbb{P}(X_r = k)\\ &= \frac{p^r}{(r-1)!} \sum_{k=r}^{\infty} (k+1)k\cdots(k-r+1) q^{k-r}\\ &= \frac{p^r}{(r-1)!} \sum_{k=r+1}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-(r+1)+1) q^{k-(r+1)}\\ &= \frac{p^r}{(r-1)!} \frac{(r+1)!}{(1-q)^{r+2}} = \frac{r(r+1)}{p^2}.\end{aligned}$$

On en déduit l'existence et la valeur de

$$\mathbb{V}(X_r) = \mathbb{E}(X_r^2) - \mathbb{E}(X_r)^2 = \mathbb{E}\big(X_r(X_r+1)\big) - \mathbb{E}(X_r) - \mathbb{E}(X_r)^2 = \frac{rq}{p^2}.$$

Exercice 25

Question 3.a

Par définition, on a $r + Y_r = X_r$, d'où $Y_r = X_r - r$.

Exercice 25

Question 3.b

On déduit immédiatement des questions précédentes que Y_r est à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_r = k) = \mathbb{P}(X_r = r+k) = \binom{r+k-1}{r-1} p^r q^k,$$

qu'elle admet espérance et variance données par :

$$\mathbb{E}(Y_r) = \mathbb{E}(X_r) - r = \frac{rq}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y_r) = \mathbb{V}(X_r) = \frac{rq}{p^2}.$$

Exercice 25

Question 3.c

Pour $k \in \mathbb{N}$, on obtient en inversant l'ordre des facteurs :

$$\begin{aligned}\binom{k+r-1}{k} &= \frac{(k+r-1)(k+r-2)\cdots(r+1)r}{k!} = \frac{r(r+1)\cdots(k+r-1)}{k!}\\ &= (-1)^k \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{-r}{k}.\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_r = k) = \binom{-r}{k} p^r (-q)^k.$$

Exercice 27

Question 1

Il vient, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{n} k\big(\mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)\big)\\ &= \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X > k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X > k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \big((k+1) - k\big)\,\mathbb{P}(X > k) - n\,\mathbb{P}(X > n)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) - (n+1)\,\mathbb{P}(X > n),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice 27

Question 2

On raisonne par double implication.

- On suppose dans un premier temps que la série $\sum_k \mathbb{P}(X > k)$ converge.
  On a dans ce cas, d'après **1.**,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) - (n+1)\,\mathbb{P}(X > n)$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

  Ainsi les sommes partielles de la série $\sum_k k\,\mathbb{P}(X = k)$ sont majorées, et comme cette série est à termes positifs, cela suffit pour assurer sa convergence et donc sa convergence absolue : la variable X admet une espérance.

- Réciproquement, on suppose que X admet une espérance.
  On note pour commencer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)\,\mathbb{P}(X > n) = (n+1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)$$
$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

  car la convergence de la série $\sum_k \mathbb{P}(X = k)$ entraîne celle de son reste vers 0.
  Il en résulte par encadrement que

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)\,\mathbb{P}(X > n) = 0.$$

  Il ressort alors de la formule obtenue en **1.** que la série $\sum_k \mathbb{P}(X > k)$ converge avec :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X),$$

  ce qui achève la démonstration.

Remarque. On n'a pas toujours

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)P(X > n) = 0$$

et cette propriété n'est pas suffisante pour assurer l'existence de $\mathbb{E}(X)$. Pour le mettre en évidence, on pourra démontrer le résultat suivant et l'appliquer aux suites définies par

$$\forall n \geqslant 1, \quad q_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \left(\text{resp.} \quad \forall n \geqslant 2, \quad q_n = \frac{1}{n \ln n}\right).$$

Théorème *Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0,1]$, décroissante et de limite nulle.*
Il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X > n) = q_n.$$

Il suffit de justifier qu'il existe une variable X telle que

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - q_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = q_{n-1} - q_n$$

puis de vérifier qu'une telle variable convient.