

Séries

Feuille d'exercices

1 Déterminer la nature des séries dont les termes généraux suivent :

- | | |
|---|--|
| <p>1. $\frac{1}{\ln n}$;</p> <p>2. $\int_0^{\pi/n} \sin^\alpha t \, dt, \alpha \geq 0$;</p> <p>3. $\ln\left(\frac{3 + \sin \frac{1}{n}}{3 - \sin \frac{1}{n}}\right)$;</p> <p>4. $\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$;</p> | <p>5. $\frac{1}{n^{1+1/n}}$;</p> <p>6. $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;</p> <p>7. $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;</p> <p>8. $\frac{(3n)!}{a^{3n}(n!)^3}, a > 0$.</p> |
|---|--|

2 Déterminer la nature des séries dont les termes généraux suivent :

- ★ 1. $(-1)^n \frac{\ln n}{n}$; 2. $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$; 3. $\cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$.

3 Établir la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

- | | |
|---|--|
| <p>1. $\sum_{n \geq 0} (n+1) \frac{1}{n!}$;</p> <p>2. $\sum_{n \geq 0} (n^3 + 2n^2 - 3n - 1) \frac{2^n}{n!}$;</p> <p>3. $\sum_{n \geq 0} (n^2 + 2n - 1) \frac{1}{2^n}$;</p> | <p>4. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)3^n}$;</p> <p>5. $\sum_{n \geq 0} \frac{4^n}{(2n)!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$;</p> <p>6. $\sum_{n \geq 0} \ln \frac{\cos(e^{-n-1})}{\cos(e^{-n})}$.</p> |
|---|--|

4 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Montrer que si les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes, alors la série $\sum v_n$ l'est aussi.

5 Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes réels positifs. Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente.

6 Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes réels positifs. Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n u_{2n}}$ est convergente.

7 Montrer la convergence de la suite de terme général $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$.

8 Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ par
★ comparaison aux séries de Riemann.

9 Discuter, en fonction de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général

$$\sqrt{n} + \alpha\sqrt{n+1} + \beta\sqrt{n+2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

et déterminer sa somme, le cas échéant.

10 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 \in]0, 1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
2. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.
3. Justifier que les séries $\sum \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sum u_n$ divergent.

11 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 1-périodique et continue.

1. Montrer que :

$$\int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} \, dt = \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) \, dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_{n \geq 1} \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} \, dt$ converge.

12 On pose :

★ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.
2. En déduire l'existence d'un réel γ , appelé *constante d'Euler*, tel que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

13 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+^*$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que :

$$x_{n+1} = x_n \left(q + \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Étant donné un paramètre $\beta \in \mathbb{R}$ à ajuster, on pose $y_n = \ln \frac{x_n}{q^n n^\beta}$ et $u_n = y_{n+1} - y_n$ pour tout $n \geq 1$.

1. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
2. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ et un réel β tels que $x_n \sim Cq^n n^\beta$.

14 Soit $\sum u_n$ une série convergente. Établir la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$.

★♣

Indication. On pourra exprimer la n -ième somme partielle T_n de la série $\sum_k u_k/k$ en fonction de la suite $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum_k u_k$ en écrivant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = S_k - S_{k-1}$.

- 15** \clubsuit 1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que $v_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que la série $\sum v_n$ converge. On pose :

$$U_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=n}^{\infty} v_k.$$

- a. Montrer que si $u_n = o(v_n)$, alors $U_n = o(V_n)$.
 b. En déduire que si $u_n \sim v_n$, alors $U_n \sim V_n$.
2. *Application.* On admet la formule de Stirling (cf. DL ?) :

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \frac{n^{n+1/2}}{e^n}, \quad n \rightarrow \infty,$$

que l'on cherche à préciser en donnant un développement asymptotique de $n!$ à trois termes (deux termes principaux plus le reste).

- a. En remarquant que

$$\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \rightarrow \infty,$$

déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

- b. On pose :

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = \ln \left(\frac{n! e^n}{n^{n+1/2}} \right).$$

Déterminer un équivalent de $u_n = a_{n+1} - a_n$ et en déduire un développement asymptotique de a_n à la précision $o(1/n)$.

- c. Conclure.

- 16** \star 1. En observant que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt,$$

montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.$$

2. En déduire la convergence et la somme de la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

- 17** Soit $x \in [0, 1]$.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} - \frac{1}{1+x^2} = (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

2. Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan x \right| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Que peut-on en déduire ?

- 18** \star On considère la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)}.$$

1. Montrer que le domaine de définition de f est \mathbb{R}^* et que f y est paire.
 2. Montrer que f est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .
 3. a. Pour $x_0 > 0$ donné, montrer l'existence d'un réel $\kappa > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2} \right], \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \kappa |x - x_0|.$$

- b. En déduire que f est continue sur \mathbb{R}^* .
 4. a. Justifier que f admet des limites (finies ou infinies) en $+\infty$ et à droite en 0.
 b. Déterminer ces limites à l'aide de minorations/majorations.

- 19** \clubsuit 1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs telle que $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ pour tout $n \geq 1$.
 Montrer que la série $\sum a_n 10^{-n}$ est convergente.

Si x désigne la somme de la série $\sum a_n 10^{-n}$, on dit que la suite (a_n) constitue un *développement décimal* du réel x et l'on note $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$.

2. Y a-t-il unicité d'un tel développement ?

Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit qu'une suite d'entiers relatifs $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ constitue un *développement décimal propre* de x si $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ pour tout $n \geq 1$ et si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}.$$

3. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un développement décimal propre d'un réel x .

- a. Montrer que la série $\sum a_n 10^{-n}$ converge vers x .

- b. Montrer que la suite (a_n) ne stationne pas à 9 (i.e. n'est pas identiquement égale à 9 à partir d'un certain rang).

4. Montrer que tout réel admet un unique développement décimal propre.

- 20** \clubsuit Montrer que les séries doubles ci-dessous sont absolument convergentes et en calculer la somme :

$$1. \sum_{i,j \geq 0} \frac{i+j}{i!j! 2^{i+j}}; \quad 2. \sum_{i,j \geq 0} \frac{(i+j)!}{i!j!} x^{i+j} \text{ (où } |x| < \frac{1}{2} \text{)}; \quad 3. \sum_{i,j \geq 0} \frac{x^i y^j}{(i+j)!} \text{ (où } x, y \in \mathbb{R} \text{)}.$$

- 21** \clubsuit Étant donné un réel $\alpha \geq 0$, on considère la série double de terme général $a_{i,j} = \frac{1}{(i^2 + j^2)^\alpha}$,
 $i, j \geq 1$. On pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k = \sum_{1 \leq i,j \leq k} a_{i,j}.$$

1. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{2k+1}{2^\alpha (k+1)^{2\alpha}} \leq u_{k+1} - u_k \leq \frac{2k+1}{(k+1)^{2\alpha}}.$$

2. On suppose dans cette question $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Montrer que la suite $(u_k)_{k \geq 1}$ diverge vers $+\infty$ et en déduire que la série double $\sum_{i,j} a_{i,j}$ diverge.
3. Montrer que si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors la série double $\sum_{i,j} a_{i,j}$ converge.

Indications

- 4** Utiliser le théorème de comparaison des séries à termes réels positifs.
- 5** Pour n assez grand, comparer u_n et u_n^2 .
- 6** Pour établir la convergence de la série à termes réels positifs $\sum u_{2n}$, on pourra rapprocher la suite de ses sommes partielles de celle de $\sum u_n$.
- 7** Montrer que la suite de terme général $\ln u_n$, $n \geq 1$, est la suite des sommes partielles d'une série convergente.
- 8** Étudier la limite de $n^\gamma u_n$ lorsque $n \rightarrow \infty$ en fonction de α et γ . À quelle condition sur α existe-t-il un réel γ qui permette de conclure ?
- 9** Effectuer un développement asymptotique du terme général pour en déduire un équivalent. On distinguera plusieurs cas selon les valeurs de α et β . En cas de convergence, la somme peut-être calculée par télescopage.
- 10**
1. Utiliser le théorème de la limite monotone.
 2. Observer que la série est télescopique.
 3. Les deux séries sont de même nature, la première est télescopique.

- 11** 1. Majorer

$$\left| \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt - \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) dt \right|$$

en utilisant le changement de variable $t = n + u$ dans l'intégrale de gauche.

2. Justifier que la série est de même nature que la série $\sum \frac{K}{n}$ où $K = \int_0^1 f(t) dt$.
- 12**
1. Grâce à un développement limité, montrer que $v_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.
 2. Justifier que la suite (u_n) converge.
- 13**
1. Utiliser un développement limité de u_n .
 2. Justifier qu'il existe une valeur de β qui rend la suite (u_n) convergente.

- 14** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{S_n}{n} - S_0.$$

- 15**
1. **a.** Revenir aux ε .
b. Appliquer le résultat de la question **a.** à $(u_n - v_n)$.
 2. **a.** Appliquer le résultat de la question **1.b.** et calculer $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ par télescopage.

- b.** Quelle est la limite de (a_n) ? Appliquer le résultat de la question **1.b.** à (u_n) après en avoir déterminé un équivalent grâce à un développement limité.

- 16**
1. Écrire la somme partielle sous la forme d'une seule intégrale, sous laquelle on reconnaîtra une somme géométrique.
 2. Grâce à un encadrement, déterminer la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ de l'intégrale au membre de droite de la formule de la question **1.**
- 17** 2. Intégrer la relation précédente entre des bornes bien choisies puis majorer l'intégrale au membre de droite.
- 18**
1. Déterminer les réels x pour lesquels la série $\sum \frac{1}{n(1+nx^2)}$ converge.
 2. Montrer par des manipulations d'inégalités que $f(x) \geq f(y)$ si $x \leq y$.
 4. **b.** Pour la limite à droite en 0, on pourra minorer $f(x)$ par une somme partielle de la série harmonique.
- 19**
1. Montrer que la suite des sommes partielles est majorée.
 2. Penser à 1...
 4. Raisonner par analyse-synthèse et considérer

$$a_n = \left\lfloor 10^n \left(x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{10^k} \right) \right\rfloor.$$