

Travaux dirigés
 Séries
 ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles
 Année 2018/2019

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 1 / 43

Exercice 1

Traité en classe.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 2 / 43

Exercice 2 Q 1

Exercice 2
Question 1

L'étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ montre qu'elle est décroissante sur $[e, +\infty[$.
En notant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k f(k),$$

on a alors :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2(n+1)} - S_{2n} = f(2n+2) - f(2n+1) \leq 0$ et la suite (S_{2n}) est donc décroissante.
- On montrerait de même que la suite (S_{2n+1}) est croissante.
- Enfin,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -f(2n+1) = -\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Elles convergent donc vers une limite commune S . Comme ce sont les deux suites extraites principales de la suite (S_n) , celle-ci converge également vers S .
Ceci établit la convergence de la série $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$, dont (S_n) est la suite des sommes partielles.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 3 / 43

Exercice 3 Q 1

Exercice 3
Question 1

On écrit :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{n+1}{n!} = \frac{n}{n!} + \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}.$$

On en déduit, par comparaison aux séries exponentielles, la convergence de la série $\sum u_n$ et sa somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 4 / 43

Exercice 3 Q 2

Exercice 3
Question 2

Pour pouvoir procéder à des simplifications identiques, on décompose le polynôme $X^3 + 2X^2 - 3X - 1$ sur la base $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$X^3 + 2X^2 - 3X - 1 = X(X-1)(X-2) + 5X(X-1) - 1.$$

D'où la convergence de la série et la valeur de sa somme :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n^3 + 2n^2 - 3n - 1) \frac{2^n}{n!} &= 2^3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{n-3}}{(n-3)!} + 5 \cdot 2^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{(n-2)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \\ &= (8 + 20 - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 27e^2. \end{aligned}$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 5 / 43

Exercice 3 Q 3

Exercice 3
Question 3

On procède de même pour faire apparaître des séries géométriques dérivées :

$$X^2 + 2X - 1 = (X+2)(X+1) - (X+1) - 2.$$

Les séries géométriques dérivées qui apparaissent sont alors convergentes puisque $|\frac{1}{2}| < 1$, d'où la convergence et la somme de la série ci-dessous :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n - 1) \frac{1}{2^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} - \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 2 \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 8. \end{aligned}$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 6 / 43

Exercice 3 Q 4

Exercice 3
Question 4

L'idée est faire apparaître des séries géométriques « primitives » (cf. remarque à la fin de l'exercice 17) :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

On obtient ainsi la convergence et la somme de la série :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)3^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) - 3 \left(\ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\right) = 2\ln\frac{2}{3} + 1. \end{aligned}$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 7 / 43

Exercice 3 Q 5

Exercice 3
Question 5

On peut déjà établir la convergence des séries proposées soit par application de la règle de d'Alembert, soit plus simplement par comparaison à une série exponentielle en écrivant par exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{4^n}{(2n)!} \leq \frac{4^n}{n!}.$$

On peut donc poser

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 8 / 43

On observe alors (travailler d'abord sur les sommes partielles pour une justification rigoureuse) que

$$S + T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{m!} = e^2$$

et de même

$$S - T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2)^m}{m!} = e^{-2}.$$

Ces deux relations constituent un système linéaire d'inconnues (S, T) , dont la résolution immédiate conduit à :

$$S = \frac{e^2 + e^{-2}}{2} \quad \text{et} \quad T = \frac{e^2 - e^{-2}}{2}.$$

Exercice 3

Question 6

Puisque $\cos e^{-n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série

$$\sum \ln \frac{\cos e^{-n-1}}{\cos e^{-n}} = \sum (\ln(\cos e^{-(n+1)}) - \ln(\cos e^{-n}))$$

est télescopique convergente car la suite de terme général $\ln(\cos e^{-n})$, $n \in \mathbb{N}$, est convergente. On a de plus :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{\cos e^{-n-1}}{\cos e^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\cos e^{-n}) - \ln(\cos 1) = -\ln(\cos 1).$$

Exercice 4

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n$$

d'où la convergence de la série $\sum v_n - u_n$ par comparaison à la série $\sum w_n - u_n$ convergente par hypothèse.

Mais puisque la série $\sum u_n$ converge, la série $\sum v_n$ est de même nature que la série $\sum v_n - u_n$; elle est donc convergente.

Exercice 5

Comme la série $\sum u_n$ converge, la suite (u_n) converge vers 0. Il en résulte que $u_n^2 = o(u_n)$ d'où, par positivité de u_n (et u_n^2), la convergence de la série $\sum u_n^2$.

Exercice 6

D'après l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sqrt{u_n u_{2n}} \leq \frac{u_n + u_{2n}}{2}.$$

En admettant provisoirement la convergence de la série $\sum u_{2n}$, on en déduit donc la convergence de la série $\sum \sqrt{u_n u_{2n}}$ par comparaison aux séries convergentes $\sum u_n$ et $\sum u_{2n}$.

On est donc ramené à établir la convergence de la série $\sum u_{2n}$. Or

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n u_{2k} \leq \sum_{k=0}^{2n} u_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} u_k = M$$

par positivité et convergence de la série $\sum u_n$. Ainsi la suite des sommes partielles de la série $\sum u_{2n}$ est majorée, et comme cette série est à termes positifs, cela suffit pour assurer sa convergence.

Exercice 7

On a :

$$\forall n \geq 1, \quad \ln u_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$$

et $(\ln u_n)$ est donc la suite des sommes partielles de la série de terme général

$$x_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right), \quad n \geq 1.$$

Comme

$$x_n \sim \frac{1}{n^2} \geq 0,$$

la série $\sum x_n$ est convergente par comparaison aux séries de Riemann. La suite $(\ln u_n)$ de ses sommes partielles est donc convergente, d'où l'on déduit que la suite de terme général $u_n = e^{\ln u_n}$ converge.

Exercice 8

On pose :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

Pour $\gamma \neq \alpha$, les théorèmes de croissances comparées donnent :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\gamma u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} (\ln n)^\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > \gamma \\ +\infty & \text{si } \alpha < \gamma \end{cases}.$$

Le cas $\gamma = \alpha$ se divise à son tour en trois sous-cas :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\ln n)^\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta > 0 \\ 1 & \text{si } \beta = 0 \\ +\infty & \text{si } \beta < 0 \end{cases}.$$

- Si $\alpha < 1$, le calcul préliminaire appliqué à $\gamma = 1$ montre que

$$0 \leq \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}\right),$$

d'où l'on déduit la divergence de la série $\sum u_n$ par comparaison à la série harmonique, divergente.

- Si $\alpha > 1$, alors on peut choisir γ réel tel que $1 < \gamma < \alpha$. Puisque $\gamma < \alpha$, le calcul préliminaire assure que

$$0 \leq \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right),$$

d'où l'on tire la convergence de la série $\sum u_n$ par comparaison à la série de Riemann $\sum 1/n^\gamma$, convergente puisque $\gamma > 1$.

- Si $\alpha = 1$, une comparaison à une série de Riemann ne permet pas de déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 10 Q 1

Exercice 10

Question 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$ et la suite (u_n) est donc décroissante. Par ailleurs son premier terme appartient à l'intervalle $]0, 1[$, stable par $f : x \mapsto x(1-x)$: plus précisément,

$$\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}.$$

Par conséquent, la suite est à termes dans l'intervalle $]0, 1[$; elle est donc minorée. Décroissante et minorée, elle est donc convergente. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on montre que sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell - \ell^2$, c'est-à-dire $\ell = 0$. Ainsi la suite (u_n) converge vers 0.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 17 / 43

Exercice 10 Q 2

Exercice 10

Question 2

La série $\sum u_n^2 = \sum (u_n - u_{n+1})$ est télescopique convergente, étant donné que la suite (u_n) converge d'après 1..

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 18 / 43

Exercice 10 Q 3

Exercice 10

Question 3

La série $\sum \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \sum (\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ est également télescopique, mais divergente puisque la suite $(\ln u_n)$ diverge vers $-\infty$ d'après 1..

Par ailleurs, puisque $u_n \rightarrow 0$,

$$\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln(1 - u_n) \sim -u_n \leq 0.$$

On en déduit par comparaison que $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$, c'est-à-dire divergente.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 19 / 43

Exercice 12 Q 1

Exercice 12

Question 1

Il vient :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2} \leq 0. \end{aligned}$$

On en déduit la convergence de la série $\sum v_n$ par comparaison à la série de Riemann convergente $-\frac{1}{2} \sum \frac{1}{n^2}$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 20 / 43

Exercice 12 Q 2

Exercice 12

Question 2

Par théorème, la suite (u_n) converge si, et seulement si, la série télescopique associée $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.

Dans le cas étudié, la suite (u_n) est donc convergente d'après la question 1.. Il existe donc $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \rightarrow \gamma$, i.e. $u_n = \gamma + o(1)$ ou encore

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 21 / 43

Exercice 13 Q 1

Exercice 13

Question 1

Il vient :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln \frac{x_{n+1}}{q^{n+1}(n+1)^\beta} - \ln \frac{x_n}{x^n n^\beta} = \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} - \ln q - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta \\ &= \ln\left(1 + \frac{\alpha}{qn} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \beta \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{\alpha}{qn} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \beta \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \left(\frac{\alpha}{q} - \beta\right) \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Pour $\beta = \frac{\alpha}{q}$, la série $\sum u_n$ est donc absolument convergente par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum 1/n^2$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 22 / 43

Exercice 13 Q 2

Exercice 13

Question 2

Pour le choix de $\beta = \frac{\alpha}{q}$, la série télescopique $\sum y_{n+1} - y_n$ est convergente d'après 1., si bien que la suite (y_n) est convergente. En notant ℓ sa limite, la suite de terme général

$$e^{y_n} = \frac{x_n}{q^n n^\beta}, \quad n \geq 1,$$

converge vers $C = e^\ell > 0$, ce qui signifie que :

$$x_n \sim Cq^n n^{\alpha/q}, \quad n \rightarrow \infty.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 23 / 43

Exercice 14

Soient $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ celle de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$. En posant $S_0 = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \quad T_n &= \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{S_{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{S_n}{n}. \end{aligned} \quad (*)$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 24 / 43

Comme la série $\sum u_n$ converge, la suite (S_n) est elle aussi convergente et par suite bornée : soit M réel tel que pour tout $n \geq 1$, $|S_n| \leq M$. Au membre de droite de la formule (*), on a donc :

- le quotient $\frac{S_n}{n}$ qui tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$;
- la somme

$$X_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

qui apparaît comme une somme partielle de la série de terme général

$$x_n = S_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \quad n \geq 1.$$

Or :

$$\forall n \geq 1, \quad |x_n| \leq M \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

d'où l'on déduit la convergence de la série $\sum x_n$ par comparaison à la série télescopique $\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$, convergente puisque la suite $\left(\frac{1}{n} \right)$ converge. La suite (X_n) est donc convergente.

La suite (T_n) est donc convergente, ce qui établit la convergence de la série $\sum \frac{u_n}{n}$.

Exercice 15

Question 1.a

On s'assure tout d'abord de la bonne définition des restes : par hypothèse, la série $\sum v_n$ converge d'où l'on déduit, puisque $u_n = o(v_n \geq 0)$, que la série $\sum u_n$ converge absolument donc converge. Les restes de ces deux séries convergentes sont donc bien définis.

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n| \leq \varepsilon v_n.$$

Dès lors,

$$\forall n \geq N, \quad |U_n| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |u_k| \leq \varepsilon \sum_{k=n}^{\infty} v_k = \varepsilon V_n.$$

Ceci établit que $U_n = o(V_n)$.

Exercice 15

Question 1.b

De même, $u_n \sim v_n \geq 0$ avec $\sum v_n$ convergente entraîne que $\sum u_n$ converge, ce qui explique la bonne définition des restes. L'hypothèse $u_n \sim v_n$ s'écrit $u_n - v_n = o(v_n)$. Par application du résultat démontré en a., on en déduit que $U_n - V_n = o(V_n)$, soit $U_n \sim V_n$.

Exercice 15

Question 2.a

On a

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \rightarrow \infty$$

d'où d'après 1.b., puisque la série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Exercice 15

Question 2.b

D'après la formule de Stirling

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{2\pi}.$$

On a par ailleurs, d'après un développement limité à l'ordre 3 du ln,

$$u_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim -\frac{1}{12n^2} \leq 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

d'où, d'après 1.b. puisque la série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge,

$$\ln \sqrt{2\pi} - a_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim -\frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim -\frac{1}{12n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Par suite,

$$a_n = \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Exercice 15

Question 2.c

D'après b.,

$$\begin{aligned} n! &= \frac{n^{n+1/2}}{e^n} \exp \left(\ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \sqrt{2\pi} \frac{n^{n+1/2}}{e^n} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Exercice 16

Question 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n (-t)^{k-1} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1 - (-t)} dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \\ &= \ln 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt. \end{aligned}$$

Exercice 16

Question 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left| (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

d'où l'on déduit par encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0.$$

Il en résulte d'après 1. la convergence et la valeur de la série suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

Exercice 16 Q 2

Remarque.

Attention, étant donné une suite de fonctions (f_n) sur un segment $[a, b]$, on n'a pas en général :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) dt,$$

même si les limites existent !

Le vérifier sur le contre-exemple (simple !) $f_n : x \in [0, 1] \mapsto nx^{n-1}$, $n \geq 1$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 33 / 43

Exercice 17 Q 1

Exercice 17

Question 1

Puisque $-x^2 \neq 1$, on a par sommation des premiers termes d'une suite géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^n (-x^2)^k = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 - (-x^2)}$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} - \frac{1}{1+x^2} = (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 34 / 43

Exercice 17 Q 2

Exercice 17

Question 2

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan x \right| &= \left| \int_0^x \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \right| \\ &\leq \int_0^x \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} \right| dt = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \\ &\leq \int_0^x t^{2n+2} dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Il en résulte par encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan x.$$

Ainsi la série ci-dessous converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 35 / 43

Exercice 17 Q 2

Remarques.

En intégrant entre x et 0 dans la question 2., on pourrait justifier que la formule est encore valable pour $x \in [-1, 0]$.

Sur le même principe, on établirait que :

$$\forall x \in]-1, 1], \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 36 / 43

Exercice 18 Q 1

Exercice 18

Question 1

Pour tout $n \geq 1$, on considère la fonction

$$u_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{n(1+nx)}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$u_n(x) \sim \frac{1}{x^2} \frac{1}{n^2} \geq 0,$$

d'où l'on déduit la convergence de la série $\sum u_n(x)$ par comparaison à la série de Riemann $\sum 1/n^2$. Ainsi $f(x)$ est bien défini pour $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction f est donc définie sur \mathbb{R}^* .

Par parité des fonctions u_n , on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x),$$

ce qui prouve que f est paire.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 37 / 43

Exercice 18 Q 2

Exercice 18

Question 2

Pour $0 < x \leq y$, on a :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n(1+nx^2)} \geq \frac{1}{n(1+ny^2)}$$

d'où en sommant, les deux séries étant convergentes :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+ny^2)} = f(y).$$

La fonction f est donc décroissante.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 38 / 43

Exercice 18 Q 3.a

Exercice 18

Question 3.a

Pour $x_0 > 0$ donné et $x \in \left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2} \right]$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^2 - x^2}{(1+nx_0^2)(1+nx^2)} \right| = |x^2 - x_0^2| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx_0^2)(1+nx^2)} \\ &\leq |x - x_0| (x + x_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx_0^2)(1+n\frac{x_0^2}{4})} \leq \kappa |x - x_0| \end{aligned}$$

où

$$\kappa = \frac{5x_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx_0^2)(1+n\frac{x_0^2}{4})}$$

est bien défini comme somme d'une série convergente par comparaison aux séries de Riemann.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 39 / 43

Exercice 18 Q 3.b

Exercice 18

Question 3.b

Pour $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, l'inégalité de la question a. implique que $f(x) \rightarrow f(x_0)$ lorsque $x \rightarrow x_0$, ce qui établit la continuité de f en x_0 . Ainsi f est continue sur \mathbb{R}_+^* puis, par parité, sur \mathbb{R}^* .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2018/2019 40 / 43

Exercice 18

Question 4.a

La fonction f étant décroissante sur \mathbb{R}_+^* , elle admet des limites en 0 et en $+\infty$ en vertu du théorème de la limite monotone :

- en $+\infty$: une limite finie car f est minorée par 0 ;
- en 0 à droite : une limite finie si f est majorée, $+\infty$ sinon.

Exercice 18

Question 4.b

On a tout d'abord, toutes séries convergentes :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{1+nx^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{nx^2} = \frac{C}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

où

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

d'où l'on déduit par encadrement que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Par ailleurs, pour $x > 0$ donné, on a :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)} \geq \sum_{1 \leq n \leq \frac{1}{x^2}} \frac{1}{n(1+nx^2)} \geq \sum_{1 \leq n \leq \frac{1}{x^2}} \frac{1}{2n} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$$

par composition des limites, étant donné que la suite des sommes partielles de la série harmonique diverge vers $+\infty$. Il en résulte que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty.$$