Suites et fonctions d'une variable

Feuille d'exercices

1 Étudier la convergence, lorsque $n \to \infty$, de :

✎

1. $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor \quad (x \in \mathbb{R})$;
2. $\displaystyle\frac{3n^2 - \sin n}{2(n+5)^2\cos(n\pi/7)}$;
3. $\displaystyle\left(\left(\frac{\ln(x+n)}{\ln n}\right)^n - 1\right)\ln n \quad (x \in \mathbb{R})$;
4. $\displaystyle\left(\mathbf{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}$.

2 Caractériser la convergence d'une suite d'entiers relatifs.

3 ★♣

1. Démontrer le théorème de Cesàro : si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, alors la suite de terme général
$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k, \qquad n \geqslant 1,$$
converge également vers ℓ. La réciproque est-elle vraie ?
2. En déduire le lemme de l'escalier : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle alors
$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} - u_n = \ell \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{n} = \ell.$$
3. **a.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que :
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \ell.$$
b. En déduire les limites, lorsque $n \to \infty$, de
$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \qquad \frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(n+n)}, \qquad \frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}.$$

4 Soient a et b deux réels strictement positifs.

✎

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = a$ et $b_0 = b$ ainsi que les relations de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$
convergent vers la même limite. Leur limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique des réels strictement positifs a et b.
2. Écrire un algorithme permettant de calculer une valeur approchée à la précision 10^{-n} de la moyenne arithmético-géométrique de a et b.

5 Étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conditions initiales $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$ définies par la relation de récurrence $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✎

6 Étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leur condition initiale et la relation de récurrence (valable pour tout $n \in \mathbb{N}$) précisées :

1. $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1-u_n}$;
2. $u_0 > -\frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \ln(1+2u_n)$;
3. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \cos u_n$;
4. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$;
5. $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n^2 - 1}$;
6. $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{\mathbf{e}^{-u_n}}{u_n}$.

7 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle telle que $u_0 = 0$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(a - u_n^2).$$

1. Étudier les variations et les points fixes de la fonction $f : x \longmapsto x + \frac{1}{2}(a - x^2)$.
2. Quel est le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $a < 0$? $a = 0$? $a = 4$?
3. On suppose $0 < a < 4$.
a. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{a}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.
b. Montrer que :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \left|u_{n+1} - \sqrt{a}\right| \leqslant \mathrm{M}\left|u_n - \sqrt{a}\right| \quad \text{où} \quad \mathrm{M} = \max\left(\frac{\sqrt{a}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{a}{4}\right).$$
c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. On suppose $a > 4$.
a. Quelles sont les limites éventuelles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
b. Justifier que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geqslant \mathrm{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \geqslant \frac{\sqrt{a}}{2}|u_n - \ell|.$$
c. Conclusion ?

8

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x = 1$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet une unique solution que l'on note x_n.
2. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, préciser sa limite.
3. On pose $y_n = 1 - x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
a. Montrer que $\ln y_n \sim -ny_n$ et en déduire que $\ln y_n \sim -\ln n$.
b. En déduire un équivalent de y_n puis un développement asymptotique de x_n.

9

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ donné, l'équation $x + x^2 + \cdots + x^n = 1$ d'inconnue $x \in \,]0,1[$ admet une unique solution notée x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
3. Calculer de deux façons la limite de $(x_n^{n+1})_{n\geqslant 2}$ et en déduire la valeur de ℓ.
4. Déterminer la limite de la suite de terme général $(2x_n)^{n+1}$, $n \geqslant 2$, et en déduire un développement asymptotique de x_n lorsque $n \to \infty$ de la forme $x_n = a + b\gamma^n + o(\gamma^n)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \,]0,1[$ à expliciter.

✎ : application ♣ : difficile ★ : classique

10 Démontrer que la fonction sin n'admet pas de limite en $+\infty$.

11 Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes et en esquisser le graphe puis préciser si elles sont injectives, surjectives et bijectives (on donnera une justification graphique puis analytique) :

1. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \ln(\mathbf{e}^x - x) - 1$;
2. $f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto x - \dfrac{1}{x}$;
3. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{2}\mathbf{e}^{2x} - \mathbf{e}^{-x}$;
4. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3 - 3x + 1$.

12 ♣ Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$, telles que $f \circ g = g \circ f$. On désire montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$. On raisonne pour cela par l'absurde : on suppose qu'un tel point n'existe pas. On note $f, f^2, \dots, f^n, \dots$ les itérés de f et de même $g, g^2, \dots, g^n, \dots$ ceux de g.

1. Justifier que, quitte à permuter f et g, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \geqslant f(x) + \varepsilon$.
2. Montrer que, pour tous $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $g^n(x) \geqslant f^n(x) + n\varepsilon$.
3. Conclure.

13 Établir les inégalités :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par $f : x \longmapsto (\ln x)/(x-1)$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ puis que f est prolongeable par continuité en 1. On notera encore f le prolongement de f à $\mathbb{R}_+^*$.
2. Justifier que f est dérivable en 1 :
   - **a.** à l'aide d'un développement limité ;
   - **b.** en étudiant la limite de $f'(x)$ lorsque $x \to 1$.

15 Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, majorée et à dérivée croissante. Montrer que f est décroissante.

16 ♣ Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, on pose :

$$\mathrm{P}_n = \frac{1}{2^n n!}\Big((\mathrm{X}^2 - 1)^n\Big)^{(n)}.$$

1. Montrer que P_n est un polynôme de degré n, pair ou impair selon la parité de n.
2. Montrer que $\mathrm{P}_n(1) = 1$ et en déduire la valeur de $\mathrm{P}_n(-1)$.
3. Montrer que P_n admet n racines deux-à-deux distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.

17 ★ On définit la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des intégrales de Wallis par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2 et montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t.$$
2. Pour $n \geqslant 2$, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
3. Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire que $\mathrm{I}_n \sim \mathrm{I}_{n-1}$ lorsque $n \to \infty$.
4. Montrer que la suite $(n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante ; calculer sa valeur. En déduire un équivalent de I_n en fonction de n.
5. Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer I_{2p} et I_{2p+1} à l'aide de factorielles et établir la formule de Wallis :
$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{p\to\infty} \frac{(2p)!!}{(2p-1)!!\sqrt{2p+1}},$$
où l'on a noté, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$:
$$(2q)!! = (2q)\times(2q-2)\times\cdots\times 4\times 2 \quad \text{et} \quad (2q+1)!! = (2q+1)\times(2q-1)\times\cdots\times 3\times 1.$$

18 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue telle que $\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

1. Justifier que f admet une primitive T-périodique.
2. En déduire que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

19 On va démontrer dans cet exercice que le nombre réel $\mathbf{e}$ est irrationnel. Pour cela, on raisonne par l'absurde : on suppose que $\mathbf{e} \in \mathbb{Q}$.

1. Montrer, à l'aide d'une formule de Taylor, que pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, l'intégrale
$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathbf{e}^t \,\mathrm{d}t$$
est alors un entier relatif.
2. Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. Conclure.

20 ★ En utilisant une formule de Taylor, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

21 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Pour $a\in\mathbb{R}$, déterminer

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}.$$

22 Déterminer la limite des fonctions suivantes au point considéré :

1. $x\longmapsto\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x,\quad x\to+\infty$;

2. $x\longmapsto\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}+x}{5+\sqrt{3x^2-x+2}},\quad x\to+\infty$;

3. $x\longmapsto\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)},\quad x\to 0\quad(b\neq 0)$;

4. $x\longmapsto x\ln\big(\ln(1+x)\big),\quad x\to 0$;

5. $x\longmapsto(2\mathbf{e}^{\sin x}-\cos x)^{\operatorname{cotan} x},\quad x\to 0$;

6. $x\longmapsto x\left(\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}\right),\quad x\to+\infty.$

23 Déterminer le développement limité des fonctions suivantes à l'ordre et voisinage du point indiqués :

1. $\mathrm{DL}_2(0):x\longmapsto\ln(2\cos x+\sin x)$;

2. $\mathrm{DL}_2(0):x\longmapsto\mathbf{e}^{\sqrt{1+x}}$;

3. $\mathrm{DL}_4(0):x\longmapsto\tan x$;

4. $\mathrm{DL}_3(\pi/4):x\longmapsto\tan x$;

5. $\mathrm{DL}_2(1):x\longmapsto\dfrac{\mathbf{e}}{\mathbf{e}^x-\mathbf{e}}-\dfrac{1}{x-1}.$

Indications

1 **1.** La partie entière $\lfloor x \rfloor$ d'un réel x est par définition le plus grand entier inférieur ou égal à x ; elle est donc caractérisée par les conditions $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. En renversant ces inégalités, obtenir un encadrement de $\lfloor x \rfloor$.

2. Trouver un équivalent du numérateur et du dénominateur puis montrer que la convergence de cette suite équivaut à celle de la suite de terme général $\cos(n\pi/7)$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Trouver un équivalent de chaque parenthèse.

4. Trouver un équivalent de la parenthèse et de l'exposant.

2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Intuitivement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle est stationnaire, i.e. constante à partir d'un certain rang. Un sens est évident. Pour l'autre, observer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ; le recours aux ε permet alors de conclure.

3 **1.** Commencer par traiter le cas $\ell = 0$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $|u_n| \leqslant \varepsilon/2$. Justifier l'inégalité

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}, \qquad |v_n| \leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} u_k\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=\mathrm{N}}^{n} |u_k|$$

et en déduire l'existence de $\mathrm{N}' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant \varepsilon$. Traiter ensuite le cas $\ell \in \mathbb{R}$ en considérant la suite de terme général $u_n - \ell$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Appliquer le résultat de la question **1.** à la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. **a.** Si $\ell > 0$, appliquer le résultat de la question **2.** à la suite de terme général $\ln u_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\ell = 0$, se livrer à de nouvelles epsilonneries.

b. Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ proposées, appliquer le résultat de la question **3.a.** à la suite de terme général $v_n = u_n^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

4 **1.** Comment établir la convergence d'une suite sans connaître à l'avance la valeur de sa limite ? On utilisera l'inégalité arithmético-géométrique (à retenir !) : pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{xy} \leqslant (x+y)/2$; démonstration : développer $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$.

2. Remarquer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

5 Étudier la suite de terme général $\ln u_n$, $n \in \mathbb{N}$, de façon à transformer la relation de récurrence donnée en une relation de récurrence linéaire.

6 **2.** La fonction f sous-jacente est croissante, de sorte que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. L'étude des points fixes de f fait apparaître deux intervalles stables ; distinguer selon que u_0 appartient à l'un ou l'autre.

3. $[0, 1]$ est un intervalle stable. Étudier les deux suites extraites principales ou appliquer l'inégalité des accroissements finis pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. $]1, +\infty[$ est un intervalle stable. Étudier les deux suites extraites principales pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge de seconde espèce.

8 **1.** Considérer la fonction $f_n : x \longmapsto x^n + x$.

2. Comparer $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$.

3. **a.** Justifier qu'on peut composer le premier équivalent par ln.

9 **1.** Étudier la fonction $f_n : x \longmapsto x + x^2 + \cdots + x^n$.

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ; pour comparer x_n et x_{n+1}, considérer $f_n(x_n)$ et $f_n(x_{n+1})$.

3. Utiliser la décroissance de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis exprimer x_n^{n+1} en fonction de x_n (sans puissance).

4. À l'aide d'un équivalent, montrer que la suite de terme général $\ln\big((2x_n)^{n+1}\big)$ converge vers 0. En déduire un équivalent de x_n^{n+1} puis de $x_n - \ell$.

10 Utiliser la caractérisation séquentielle.

12 **1.** Commencer par montrer que la fonction $g-f$ est d'un signe strict constant, qu'on peut supposer positif (quitte à permuter f et g). Améliorer ensuite l'inégalité $g - f > 0$ en $g - f \geqslant \varepsilon$.

2. Raisonner par récurrence.

13 La fonction sin est concave sur $[0, \pi/2]$.

14 **2.** **b.** Utiliser le théorème des accroissements finis pour relier le taux d'accroissement à la dérivée.

15 Raisonner par l'absurde. Justifier que si f n'était pas décroissante, il existerait deux réels $x_0 \geqslant 0$ et $m > 0$ tels que pour tout $x \geqslant x_0$, $f'(x) \geqslant m$ et aboutir à une contradiction.

16 **3.** Appliquer le théorème de Rolle n fois au polynôme $(\mathrm{X}^2 - 1)^n$. Plus précisément, montrer par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$ que $\big((\mathrm{X}^2-1)^n\big)^{(k)}$ admet 1 et -1 pour racines de multiplicités $n-k$ et k autres racines deux-à-deux distinctes dans l'intervalle $]-1, 1[$.

17 **1.** Pour I_2, linéariser $\cos^2 t$. Pour la nouvelle expression de I_n, utiliser un changement de variable affine transformant sinus en cosinus et préservant l'intervalle d'intégration $[0, \pi/2]$.

2. Utiliser une intégration par parties. Écrire $\sin^n t = (\sin^{n-1} t)(\sin t)$.

3. En utilisant la décroissance de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la question **2.**, encadrer le quotient $\mathrm{I}_{n-1}/\mathrm{I}_n$ par deux suites convergeant vers 1.

5. Conjecturer une expression et l'établir par récurrence ou utiliser un produit télescopique :

$$\mathrm{I}_{2p} = \mathrm{I}_0 \prod_{k=1}^{p} \frac{\mathrm{I}_{2k}}{\mathrm{I}_{2k-2}}, \qquad \mathrm{I}_{2p+1} = \mathrm{I}_1 \prod_{k=1}^{p} \frac{\mathrm{I}_{2k+1}}{\mathrm{I}_{2k-1}}.$$

18 **1.** L'intégrale d'une fonction T-périodique sur un segment de longueur T est indépendante du choix du segment d'intégration.

2. Justifier que les primitives de f sont bornées.

19 **1.** Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction exponentielle sur le segment $[0, 1]$.

2. Utiliser un encadrement.

3. Justifier que $I_n = 0$ pour n assez grand et en déduire une contradiction.

20 À $x \in \mathbb{R}$ fixé, appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle sur le segment $[0, x]$.

21 Utiliser une formule de Taylor.

22 Utiliser (à bon escient) équivalents et développements limités.