

Algèbre linéaire

Quelques exercices corrigés

Premier exercice

Dans \mathbb{R}^3 , on considère les sous-espaces vectoriels F et G donnés par les équations ci-dessous :

$$F : x + 2y - 3z = 0 \qquad G : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \end{cases}.$$

On note $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. **a.** Déterminer une base de F.
b. Déterminer une base de G.
2. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
3. **a.** Justifier que les vecteurs obtenus en 1. forment une base \underline{e} de \mathbb{R}^3 .
b. Déterminer la matrice de passage P de la base $\underline{\varepsilon}$ à la base \underline{e} .
c. Calculer P^{-1} .
4. On considère la symétrie s de \mathbb{R}^3 par rapport à F et parallèlement à G.
a. Déterminer la matrice A représentant s en base \underline{e} .
b. En déduire la matrice B représentant s en base $\underline{\varepsilon}$.

Deuxième exercice

On note $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et l'on admet que les vecteurs

$$e_1 = (1, 1, 1), \quad e_2 = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad e_3 = (1, 0, 1)$$

forment une base \underline{e} de \mathbb{R}^3 . On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 représenté en base \underline{e} par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Exprimer les vecteurs $f(e_1), f(e_2)$ et $f(e_3)$ sous la forme $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.
b. Calculer de même $f^2(e_1)$ puis $f^3(e_1)$.
2. **a.** Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à la base \underline{e} .
b. Exprimer la matrice B représentative de f en base canonique en fonction de A et P.
c. Calculer P^{-1} .
d. En déduire l'expression explicite de B.
3. Déterminer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\alpha f^2 + \beta f + \gamma \text{id} = 0$.

Troisième exercice

Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{5,4}(\mathbb{R}).$$

1. **a.** Préciser les valeurs de p et q.
b. Déterminer l'expression analytique de

$$f : (x_1, \dots, x_p) \longmapsto (y_1, \dots, y_q),$$

c'est-à-dire exprimer y_1, \dots, y_q en fonction de x_1, \dots, x_p .

2. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
3.
 - a. En déduire la dimension de $\text{Im } f$.
 - b. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
 - c. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $\text{Im } f$.

Algèbre linéaire

Eléments de correction

Premier exercice

1. a. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x, y, z) \in F \iff x = -2y + 3z \iff (x, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(3, 0, 1).$$

Les vecteurs $e_1 = (-2, 1, 0)$ et $e_2 = (3, 0, 1)$ forment donc une famille génératrice de F. Ils sont par ailleurs linéairement indépendants donc en forment une base.

b. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x, y, z) \in G \iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} y = 2z \\ x = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = z(0, 2, 1).$$

Le vecteur $e_3 = (0, 2, 1)$ forme donc une base de G.

2. La somme de F et G est directe car un vecteur de G, qui s'écrit sous la forme $\lambda e_3 = (0, 2\lambda, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ne vérifie l'équation de F que pour $\lambda = 0$.

Par ailleurs $\dim F + \dim G = 3$ d'après 1., ce qui suffit à assurer que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

3. a. D'après 1., (e_1, e_2) est une base de F et (e_3) en est une de G. Comme les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 d'après 2., la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 .

b. On a par définition

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. Pour $X = {}^t(x_1 \ x_2 \ x_3)$ et $Y = {}^t(y_1 \ y_2 \ y_3)$ dans $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on inverse le système $Y = PX$. En choisissant successivement comme pivot x_1 sur la deuxième ligne puis x_2 sur la troisième, il vient :

$$Y = PX \iff \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = y_1 \\ x_1 + 2x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\iff} \begin{cases} 3x_2 + 4x_3 = y_1 + 2y_2 \\ x_1 + 2x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \\ \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\iff} \begin{cases} x_3 = y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\ x_1 + 2x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\ x_1 = -2y_1 - 3y_2 + 6y_3 \\ x_2 = -y_1 - 2y_2 + 4y_3 \end{cases}.$$

L'inverse de P se lit sur le dernier système (attention à l'ordre des lignes) :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. a. Puisque e_1 et e_2 appartiennent à F, on a $s(e_1) = e_1$ et $s(e_2) = e_2$. Le vecteur e_3 appartient quant à lui à G et a donc pour image $s(e_3) = -e_3$. On en déduit la matrice de s en base \underline{e} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b. Les matrices A et B, représentant respectivement l'endomorphisme s dans les bases \underline{e} et $\underline{\varepsilon}$, sont liées par la formule $A = P^{-1}BP$ où P est la matrice de passage de $\underline{\varepsilon}$ à \underline{e} . Le calcul donne alors :

$$B = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 12 \\ -2 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Deuxième exercice

1. a. Il vient $f(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3 = (2, 3, 3)$ et de même $f(e_2) = (2, -3, 0)$ puis $f(e_3) = (2, 0, 3)$.

Remarque. En notant P la matrice de passage de la base canonique à la base \underline{e} (cf. question c.), les colonnes de la matrice $(P^{-1})^{-1}A = PA$ donnent le résultat car cette matrice représente l'application linéaire f en bases \underline{e} au départ et $\underline{\varepsilon}$ à l'arrivée.

- b. Les coordonnées du vecteur $f^2(e_1)$ en base \underline{e} sont données par

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

si bien que $f^2(e_1) = 4e_1 - 5e_2 + 5e_3 = (4, 9, 9)$. On obtient le même résultat en calculant directement $PA^t \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Il vient de même $f^3(e_1) = (8, 27, 27)$.

2. a. La matrice de passage de la base canonique à la base \underline{e} est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b. La formule de changement de base donne $B = PAP^{-1}$.

- c. Le calcul donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- d. D'après c., d. et e.,

$$B = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Le polynôme $P = (X - 2)(X - 3) = X^2 - 5X + 6$ annule $B : B^2 - 5B + 6I_3$ donc $f : f^2 - 5f + 6 \text{id} = 0$.

Troisième exercice

1. a. On a $p = 4$ et $q = 5$.

- b. Les coordonnées de $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ en base canonique sont données par la matrice

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 \\ 3x_1 + 8x_3 - 2x_4 \\ x_2 - 3x_3 - x_4 \\ -2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

2. On résout le système

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \iff \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 + 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0 \\ -5x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ -6x_2 - 10x_3 - 8x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \underline{x_1} + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ -4x_3 - 2x_4 = 0 \\ -4x_3 - 2x_4 = 0 \\ \underline{x_2} + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \\ & \begin{matrix} \iff \\ L_5 \leftarrow \frac{1}{5}L_5 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_5 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 6L_5 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_5 \end{matrix} \\ & \iff \begin{cases} x_1 = 2x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 \end{cases} \end{aligned}$$

Le noyau de f est donc la droite dirigée par le vecteur $(4, -1, -1, 2)$.

3. a. D'après le théorème du rang, $\text{rg } f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Ker } f = 3$ et $\text{Im } f$ est donc de dimension 3.
- b. Les colonnes de A donnent quatre vecteurs générateurs $v_1 = (1, 2, 3, 0, -2)$, $v_2 = (2, -1, 0, 1, 1)$, $v_3 = (6, 7, 8, -3, -7)$ et $v_4 = (2, -1, -2, -1, 1)$ de $\text{Im } f$. Mais la question c. fait apparaître que $v_4 = -2v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$. La famille (v_1, v_2, v_3) est donc génératrice $\text{Im } f$ et comme elle est formée de $3 = \dim(\text{Im } f)$ vecteurs, c'est une base de $\text{Im } f$.
- c. On recherche les hyperplans d'équations $a_1y_1 + \dots + a_5y_5 = 0$ contenant v_1, v_2 et v_3 . La résolution du système associé (à cinq inconnues et trois équations) conduit (par exemple) aux deux hyperplans H_1 et H_2 d'équations respectives $y_2 + y_5 = 0$ et $y_1 + 7y_2 - 5y_3 + 5y_4 = 0$. On a donc l'inclusion $\text{Im } f \subset H_1 \cap H_2$ mais par ailleurs, le théorème du rang appliqué à l'application linéaire g canoniquement associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

montre que $H_1 \cap H_2 = \text{Ker } g$ est de dimension 3 et l'inclusion précédente est donc une égalité. Le sous-espace $\text{Im } f$ est donc caractérisé par le système d'équations

$$\begin{cases} y_2 + y_5 = 0 \\ y_1 + 7y_2 - 5y_3 + 5y_4 = 0 \end{cases}$$