Préparation aux oraux

Semaine 3

1 > `ESCP 2015 1.16` <

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction

$$f_n :]n, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k}.$$

1. Soit A un réel fixé strictement positif. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = \mathrm{A}$ admet une unique solution que l'on notera x_n.
2. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. **a.** Déterminer $\lim_{n\to\infty} f_n(n+1)$ et en déduire qu'il existe un entier n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $x_n > n+1$.
   b. Plus généralement, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un rang n_k tel que pour tout $n \geqslant n_k$, $x_n > n+k$.
4. Montrer que :
$$\forall n \geqslant n_1, \quad \int_{x_n-n}^{x_n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant f_n(x_n) = \mathrm{A} \leqslant \int_{x_n-n-1}^{x_n} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$
5. **a.** Montrer que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_n$ est convergente et exprimer sa limite en fonction de A.
   b. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{x_n}$.

2 > `HEC 2015 S-106, exercice principal` <

1. *Question de cours :* donner la définition du moment d'ordre k d'une variable aléatoire réelle.

Soient $n \geqslant 1$ un entier et X une variable aléatoire réelle discrète finie, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ respectivement.
On définit la fonction de moments M de X par :

$$\mathrm{M} : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{M}(t) = \mathbb{E}(\mathbf{e}^{t\mathrm{X}}).$$

2. **a.** Déterminer la fonction de moments d'une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
   b. En déduire la fonction de moments d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.
3. **a.** Montrer que M est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées successives en 0 à l'aide des moments de la variable aléatoire X.
   b. Montrer que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{M}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathrm{M}^{(k)}(0).$$
4. On considère n réels distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
   a. Montrer que la matrice ci-dessous est inversible :
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$
   On utilisera l'application $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \mathrm{Q} \longmapsto \big(\mathrm{Q}(x_1), \mathrm{Q}(x_2), \ldots, \mathrm{Q}(x_n)\big)$ pour montrer que la matrice ${}^t\mathrm{A}$ est inversible.
   b. En déduire que la fonction de moments d'une variable aléatoire discrète finie détermine sa loi.
5. On pose, pour tout réel t, $\mathrm{K}(t) = \ln\big(\mathrm{M}(t)\big)$.
   a. Montrer que K est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   b. Que représentent $\mathrm{K}'(0)$ et $\mathrm{K}''(0)$ pour la variable aléatoire X ?
   c. Montrer que les fonctions M et K sont convexes sur $\mathbb{R}$.

3 > `HEC 2015 S-106, exercice sans préparation` <

1. Soit P un trinôme tel que $\mathrm{P}(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{P}(x) + \mathrm{P}'(x) + \mathrm{P}''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Plus généralement, soit P un polynôme de degré n tel que $\mathrm{P}(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   a. Que peut-on dire de la parité de n ?
   b. Montrer que $\mathrm{P}(x) + \mathrm{P}'(x) + \mathrm{P}''(x) + \cdots + \mathrm{P}^{(n)}(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4 > `ESCP 2015 1.06` <

On note $\mathcal{C}^0$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathcal{C}_b^0$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0$ formé des fonctions bornées sur $\mathbb{R}_+$.
Étant donnée une fonction ω de $\mathcal{C}^0$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \Omega(x) = \int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0$. On pose :
$$\forall x > 0, \quad \varphi(f)(x) = \frac{1}{\Omega(x)} \int_0^x f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t.$$
   Montrer que $\varphi(f)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle admet un prolongement par continuité en 0. On note $\mathrm{T}(f)$ la fonction ainsi prolongée.

Soit T l'application qui à tout $f \in \mathcal{C}^0$ associe $\mathrm{T}(f)$.

2. **a.** Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0$. A-t-on $\mathrm{T}(\mathcal{C}_b^0) \subset \mathcal{C}_b^0$?
   b. Montrer que T est injectif.
3. On dit que λ est une valeur propre de T sur $\mathcal{C}^0$ s'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^0$ non identiquement nulle telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{T}(f)(x) = \lambda f(x)$.
   Soit λ une valeur propre de T et f une fonction telle que $\mathrm{T}(f) = \lambda f$.

a. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (1-\lambda)f(x)\omega(x) = \lambda f'(x)\Omega(x). \qquad (\star)$$

b. Soit H une primitive de $\frac{\omega}{\Omega}$. En utilisant la fonction $\psi : x \longmapsto f(x)\mathbf{e}^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}\mathrm{H}(x)}$, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $(\star)$ précédente.

c. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de T sur $\mathcal{C}^0$ et donner pour chaque valeur propre λ la dimension de l'espace $\{f \in \mathcal{C}^0 : \mathrm{T}(f) = \lambda f\}$.

5 `> HEC 2015 S-147, exercice principal <`

1. *Question de cours :* rappeler la définition d'une application surjective et d'une application injective.

2. a. Montrer qu'un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est surjectif (c'est-à-dire que l'application $x \longmapsto \mathrm{P}(x)$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) si, et seulement si, le degré du polynôme P est impair.

b. Montrer qu'un polynôme P est injectif (c'est-à-dire que l'application $x \longmapsto \mathrm{P}(x)$ est injective sur $\mathbb{R}$) si, et seulement si, le polynôme P' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$ sans être identiquement nul.

3. Dans cette question, P est un polynôme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que si λ est une racine réelle multiple de P, alors P est annulateur de la matrice $\left(\begin{smallmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)$.

b. Soit $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$ un polynôme unitaire de degré 2, à coefficients réels et de discriminant strictement négatif.

Montrer que si Q est un diviseur de P, il existe deux matrices distinctes de

$$\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

qui annulent le polynôme P.

c. Montrer que l'application $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{P}(\mathrm{M})$ n'est pas injective sur $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Dans cette question, soient n un entier de $\mathbb{N}^*$ et P un polynôme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que l'application $x \longmapsto \mathrm{P}(x)$ soit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Montrer que si M est une matrice diagonalisable de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, alors la matrice P(M) est diagonalisable et possède le même nombre de valeurs propres que M.

b. Montrer que l'application $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{P}(\mathrm{M})$ est injective sur l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

6 `> HEC 2015 S-147, exercice sans préparation <`

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ centrée et admettant une variance σ^2.

1. Montrer que pour toute variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et admettant un moment d'ordre 2, on a :

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2)\,\mathbb{P}(\mathrm{Y} > 0)}.$$

2. En déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} > \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}.$$

7 `> ESCP 2015 1.09 <`

Dans tout l'exercice, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

1. Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose de plus que g garde un signe constant sur $[a,b]$.

Montrer qu'il existe au moins un point $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante de classe $\mathscr{C}^1$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

On veut montrer l'existence d'un réel $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. Prouver le résultat si $f(a) = 0$.

On suppose dans la suite que $f(a) \neq 0$.

b. On note G la primitive de g sur $[a,b]$ qui s'annule en a. Justifier l'existence d'un point $d \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{G}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{G}(d)\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

c. Conclure à l'aide d'une intégration par parties.

8 `> HEC 2015 S-151, exercice principal <`

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \langle x, y\rangle$ un produit scalaire sur E et $x \longmapsto \|x\|$ la norme euclidienne associée.

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $(v_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ de vecteurs unitaires (i.e. de norme 1) de E.

1. *Question de cours :* énoncer le théorème de Pythagore.

2. On suppose que les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont deux-à-deux orthogonaux. Montrer que pour tout n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, on a $\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}$.

3. On ne suppose plus que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont deux-à-deux orthogonaux. On lance une pièce de monnaie bien équilibrée n fois de suite et, pour $j \in [\![1, n]\!]$, on note :

$$\mathrm{X}_j = \begin{cases} -1 & \text{si la pièce retombe sur face au } j\text{-ième lancer} \\ 1 & \text{si la pièce retombe sur pile au } j\text{-ième lancer} \end{cases}.$$

a. Préciser un modèle $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de cette expérience tel que $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ soient des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$ mutuellement indépendantes pour $\mathbb{P}$. On se place dorénavant dans ce modèle.

b. Montrer que l'application $\mathrm{U} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathrm{U}(\omega) = \|\mathrm{X}_1(\omega)v_1 + \mathrm{X}_2(\omega)v_2 + \cdots + \mathrm{X}_n(\omega)v_n\|^2$$

est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Cette variable aléatoire U pourra être notée $\|\mathrm{X}_1 v_1 + \mathrm{X}_2 v_2 + \cdots + \mathrm{X}_n v_n\|^2$.

c. Déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{U})$. En déduire qu'il existe un n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| \leqslant \sqrt{n}$.

d. Montrer que la famille $(v_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est orthonormale si, et seulement si, pour tout n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, on a $\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}$.
On commencera par prouver que, pour tout couple de vecteurs $(a, b) \in \mathrm{E}^2$, $\|a + b\|^2 = \|a - b\|^2$ si, et seulement si, a et b sont orthogonaux. Autrement dit, les diagonales d'un parallélogramme $\mathcal{P}$ sont d'égales longueurs si, et seulement si, $\mathcal{P}$ est un rectangle.

e. En déduire que si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ne sont pas deux-à-deux orthogonaux, il existe un n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| > \sqrt{n}$.

$\boxed{9}$ `> HEC 2015 S-151, exercice sans préparation <`

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente à termes strictement positifs et de limite nulle. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $v_n = \frac{u_{n+1}}{\mathrm{S}_n}$.

1. Étudier la nature de la série $\sum_k v_k$ en fonction de la nature de la série $\sum_k u_k$.

2. Quel résultat obtient-on dans le cas où $u_n = \frac{1}{n}$?