Préparation aux oraux

Semaine 2

$\boxed{1}$ `> ESCP 2015 3.11 <`

1. Étant donné un réel $\lambda > 0$, on considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{e}^x}$.

a. Prouver que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

b. Soit U une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de densité f. Déterminer la loi de $\mathrm{V} = \exp \mathrm{U}$.

c. Soit T une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi uniforme sur $]0, 1[$. Démontrer que la variable aléatoire $\mathrm{W} = \ln\left(-\frac{\ln \mathrm{T}}{\lambda}\right)$ a même loi que U.

2. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mutuellement indépendantes, de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$ est un réel fixé.

a. Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

b. La variable $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ peut-elle suivre une loi exponentielle ?

c. Montrer que $\mathrm{S} = \mathrm{X} + \mathrm{Y} + \mathrm{Z}$ admet une densité que l'on déterminera.

3. Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice relativement à cette base :

$$\mathrm{M}(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

On note $s = a + b + c$.

a. Déterminer $\operatorname{Ker} u$ et sa dimension.

b. À quelle condition sur (a, b, c) la matrice $\mathrm{M}(a, b, c)$ est-elle celle d'un projecteur ?

c. Démontrer que si $s = 0$, alors $\mathrm{M}(a, b, c)$ admet 0 pour seule valeur propre. Est-elle diagonalisable ?

d. Démontrer que si $s \neq 0$, alors $\mathrm{M}(a, b, c)$ est diagonalisable.

4. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mutuellement indépendantes, de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

a. Déterminer la probabilité que la matrice $\mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ ne soit pas diagonalisable, où M est la matrice définie dans la question précédente.

b. Calculer la probabilité que $\mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ ait une valeur propre supérieure à 1.

$\boxed{2}$ `> HEC 2015 S-138, exercice principal <`

1. *Question de cours :* formule de Taylor à l'ordre r avec reste intégral pour une fonction de classe $\mathscr{C}^{r+1}$.

Soient $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Pour tout réel λ, on note E_λ l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(px + q) = \lambda f(x).$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = pu_n + q$.

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

b. Soit $f \in \mathrm{E}_\lambda$. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n)$ en fonction de λ et u_0.

3. **a.** Déterminer E_1.

b. On suppose que $\lambda \neq 1$ et que l'ensemble E_λ n'est pas réduit à la fonction nulle. Montrer que $|\lambda| < 1$ et préciser alors la valeur de $f(1)$ pour toute fonction $f \in \mathrm{E}_\lambda$.

4. Dans cette question, on prend $|\lambda| < 1$ et on suppose l'existence d'une fonction f non constante de E_λ, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On note $f^{(n)}$ la fonction dérivée n-ième de f.

a. Montrer que si $f \in \mathrm{E}_\lambda$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \in \mathrm{E}_{\lambda/p^n}$.

b. Étudier le cas où $\lambda = 0$.

c. Soit k_0 le plus petit entier tel que $f^{(k_0+1)}$ soit la fonction nulle.
Montrer que $\lambda = p^{k_0}$ et que pour tout $i \in [\![0, k_0[\![$, on a $f^{(i)}(1) = 0$.

d. En déduire l'expression de f. Conclure.

$\boxed{3}$ `> HEC 2015 S-138, exercice sans préparation <`

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de même loi exponentielle de paramètre $a > 0$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la variable aléatoire N_x par :

$$\mathrm{N}_x = \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{N}^* : \mathrm{X}_k > x\} & \text{si cet ensemble n'est pas vide} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Déterminer la loi de N_x et préciser son espérance $\mathbb{E}(\mathrm{N}_x)$.

2. Déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}\big(\mathrm{N}_x > \mathbb{E}(\mathrm{N}_x)\big).$$

$\boxed{4}$ `> ESCP 2015 2.14 <`

Soient $n \geqslant 2$ entier et f un endomorphisme de $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$. On dit que g est un *pseudo-inverse* de f si g est un endomorphisme de E vérifiant les trois propriétés suivantes :

$$\text{(i) } f \circ g \circ f = f \qquad \text{(ii) } g \circ f \circ g = g \qquad \text{(iii) } f \circ g = g \circ f.$$

1. **a.** On suppose que f est un automorphisme de E. Montrer que f admet un unique pseudo-inverse.

b. On suppose que f est un projecteur de E. Proposer un pseudo-inverse de f.

2. Montrer que si u et v sont deux endomorphismes de E, on a $\operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$.

3. On suppose dans cette question que g est un endomorphisme de E vérifiant la propriété (i).

a. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des projecteurs.

b. Comparer les rangs de f, $f \circ g$ et $g \circ f$.

c. Montrer que $f \circ g$ est le projecteur sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à un sous-espace vectoriel contenant $\operatorname{Ker} g$.

4. On suppose dans cette question que g et h sont deux pseudo-inverses de f.

a. Montrer que $f \circ h = g \circ f$.

b. Montrer que $g = h$.

5. On suppose dans cette question que f admet un pseudo-inverse g.

a. Montrer que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$.

b. Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.

5 > `HEC 2015 S-149, exercice principal` <

1. *Question de cours :* théorème de transfert pour une variable aléatoire à densité.

Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X})$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Dans tout l'exercice, U désigne une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

Soit g une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+$. On pose :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \int_0^1 g(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $\mathrm{T}_n = \frac{1}{n}\lfloor 1 + n\mathrm{U}\rfloor$, où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la partie entière.

a. Déterminer la loi de T_n.

b. Calculer $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(g(\mathrm{T}_n)\big)$ en fonction de I.

c. Calculer $\lim_{n\to\infty} \mathbb{V}\big(g(\mathrm{T}_n)\big)$ en fonction de I et J.

3. On pose $\mathrm{X} = g(\mathrm{U})$ et $\mathrm{Y} = \frac{1}{2}\big(g(\mathrm{U}) + g(1-\mathrm{U})\big)$.

a. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$ en fonction de I.

b. Soient f et h deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Q}(\lambda) = \int_0^1 \big(\lambda f(t) - h(t)\big)^2\,\mathrm{d}t.$$

Établir l'inégalité :

$$\Big(\int_0^1 f(t)h(t)\,\mathrm{d}t\Big)^2 \leqslant \Big(\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t\Big)\Big(\int_0^1 h(t)^2\,\mathrm{d}t\Big).$$

c. En déduire que $\mathbb{V}(\mathrm{Y}) \leqslant \mathbb{V}(\mathrm{X})$.

4. On suppose dans cette question que la fonction g est croissante sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère deux variables aléatoires U_n et W_n indépendantes et de même loi que la variable aléatoire T_n de la question **2.**.

a. Justifier l'inégalité :

$$\mathbb{E}\Big(\big[g(\mathrm{U}_n) - g(\mathrm{W}_n)\big]\big[g(1-\mathrm{U}_n) - g(1-\mathrm{W}_n)\big]\Big) \leqslant 0.$$

b. En déduire que :

$$\mathbb{E}\big(g(\mathrm{T}_n)g(1-\mathrm{T}_n)\big) \leqslant \mathbb{E}\big(g(\mathrm{T}_n)\big)\,\mathbb{E}\big(g(1-\mathrm{T}_n)\big).$$

c. Montrer que $\mathbb{V}(\mathrm{Y}) \leqslant \frac{1}{2}\,\mathbb{V}(\mathrm{X})$.

6 > `HEC 2015 S-149, exercice sans préparation` <

On note E_n l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $2n$ de la forme :

$$\begin{pmatrix}
a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\
0 & a_2 & & 0 & 0 & & b_2 & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\
0 & 0 & & a_n & b_n & & 0 & 0 \\
0 & 0 & & b_n & a_n & & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\
0 & b_2 & & 0 & 0 & & a_2 & 0 \\
b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1
\end{pmatrix}.$$

1. Trouver la dimension et une base de E_n.

2. Justifier la diagonalisabilité des matrices de E_n et trouver leurs colonnes propres.

3. Quelles sont les matrices inversibles de E_n ?

7 > `ESCP 2015 1.08` <

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels non tous nuls. On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{k=1}^n x_k^2, \quad g(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 \quad \text{et} \quad h(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^n a_k x_k.$$

1. a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Déterminer son gradient en tout point.

b. Prouver que f admet un maximum sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\mathrm{S} = \Big\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n x_k^2 = 1\Big\}.$$

c. Déterminer le maximum de f sur S.

d. En déduire que :

$$\forall u = (u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \Big|\prod_{k=1}^n u_k\Big| \leqslant \Big(\frac{\|u\|}{\sqrt{n}}\Big)^n,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.

2. a. Soit $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $a_i \neq 0$. On pose :

$$\mathrm{H} = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : h(x_1,\ldots,x_n) = 1\}$$

et

$$\mathrm{B} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant \frac{1}{|a_i|}\Big\}.$$

Prouver que l'ensemble $\mathrm{B} \cap \mathrm{H}$ est non vide, puis qu'il est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.

b. Justifier que la fonction g admet un minimum sur $\mathrm{B} \cap \mathrm{H}$. Prouver que ce minimum est aussi le minimum de g sous la contrainte $h(x_1,\ldots,x_n) = 1$.

c. Déterminer le minimum de g sur H.

8 `> HEC 2015 S-154, exercice principal <`

1. *Question de cours :* définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'un endomorphisme.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose l'existence d'un réel k tel que ${}^t AA + A{}^t A = kI_n$.

2. On pose $S = {}^t AA + A{}^t A$ et, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $q(X) = {}^t XSX$.
   Étudier le signe de $q(X)$ et en déduire que $k \geqslant 0$.
3. On suppose que $k = 0$. Montrer que $A = 0$.

On suppose dorénavant que $k > 0$.

4. Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ ayant pour matrices respectives A et ${}^t A$ dans la base canonique.
   Montrer que $(\mathrm{Ker}\, f) \cap (\mathrm{Ker}\, g) = \{0\}$.
5. On pose $B = {}^t AA$. Soient λ une valeur propre de B et X un vecteur propre associé.
   a. Montrer que $\lambda \geqslant 0$.
   b. Montrer que X est un vecteur propre de la matrice $A{}^t A$ pour une valeur propre μ que l'on précisera. En déduire que $\lambda \in [0, k]$.
   c. On suppose dans cette question que $\lambda \in]0, k[$. Montrer que les vecteurs AX et ${}^t AX$ sont des vecteurs propres de B pour la valeur propre μ.
   d. On se place dans la situation de la question **c.**. On note E_λ et E_μ les sous-espaces propres de la matrice B pour les valeurs propres λ et μ respectivement. On note φ l'application de E_λ dans E_μ définie par $\varphi(X) = AX$.
   Montrer que l'application φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Que peut-on dire si $\lambda = 0$ ou $\lambda = k$?

9 `> HEC 2015 S-154, exercice sans préparation <`

Soient $p \in]0, 1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.
On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{\frac{S_n}{n}}\right)$.
2. Étudier la convergence en probabilité de la suite de variables aléatoires $\left(\mathbf{e}^{\frac{S_n}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.