Informatique

TP 8

Méthode de Monte-Carlo

Partie 1 : principe et premiers exemples

On considère une fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sauf peut-être en un nombre fini de points ainsi qu'une variable aléatoire X. On suppose que $g(X)$ est une variable aléatoire admettant une espérance m et une variance σ^2.
La loi des grands nombres assure qu'étant donnée une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X, la suite de terme général

$$\overline{g}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k)$$

converge en probabilité vers $m = \mathbb{E}\big(g(X)\big)$.
La méthode de Monte-Carlo consiste à approcher la quantité $\mathbb{E}\big(g(X)\big)$, difficile à calculer, par une réalisation de la variable aléatoire $\overline{g}_n$ obtenue par simulation pour n assez grand.

Exercice 1

Utiliser la méthode de Monte-Carlo pour déterminer une valeur approchée des séries et intégrales ci-dessous :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}, \qquad I = \int_{-2}^{3} \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J = \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-t}}{1+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

Partie 2 : approximation d'une probabilité

La méthode de Monte-Carlo est en particulier utilisée pour approcher la probabilité d'un événement A susceptible de se produire au cours d'une expérience. On simule pour cela l'expérience un grand nombre de fois et on considère les variables aléatoires

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si l'événement A se produit au cours de la } k\text{-ième expérience} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(A)$. Si g désigne la fonction identité, alors $\overline{g}_n$ est la fréquence de réalisation de l'événement A au cours des n premières expériences, qui converge en probabilité d'après la loi des grands nombres vers $\mathbb{E}(X_1) = p = \mathbb{P}(A)$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 2

On considère le code suivant :

```
n=10^4;
X=rand(2,n);
Y=X(1,:).^2+X(2,:).^2;
disp(4*sum(Y<1)/n);
```

Que va afficher le code ci-dessus ? L'expliquer et le vérifier expérimentalement.

Exercice 3 : illustration d'un résultat démontré dans EML 2012

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue dans cette urne U_n des tirages successifs d'une boule avec remise. On suppose que tous les tirages dans U_n sont équiprobables. On s'arrête dès que l'on obtient une boule déjà obtenue lors d'un précédent tirage. On note T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
On souhaite illustrer avec Scilab la convergence en loi de la suite de variables aléatoires de terme général $Y_n = \frac{T_n}{\sqrt{n}}$ vers une variable Y de densité

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x\mathbf{e}^{-x^2/2} & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

1. Écrire une `function y=simuleY(n)` qui simule la variable aléatoire Y_n.
2. Comment approcher la fonction de répartition de Y_n par la méthode de Monte-Carlo ? La représenter graphiquement sur $[0,4]$ pour $n = 50$.
3. Représenter sur $[0,4]$ la fonction de répartition de Y. Bien qu'on sache faire le calcul, on approchera la valeur de $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ par la méthode des rectangles pour l'exercice.
4. Illustrer la convergence en superposant les représentations précédentes pour différentes valeurs de n.

Partie 3 : garanties d'approximation

La méthode de Monte-Carlo étant basée sur des simulations, la qualité du résultat renvoyé est variable. Il n'est pas possible de faire en sorte que le résultat renvoyé soit toujours satisfaisant, mais seulement de limiter la probabilité qu'il ne le soit pas.
On dispose pour cela de deux outils :

- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, qui donne
$$\mathbb{P}\big(|\overline{g}_n - m| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$
- Le théorème limite central, selon lequel
$$\mathbb{P}\left(|\overline{g}_n - m| \geqslant z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathbb{P}(|\overline{g}_n^*| \geqslant z) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(|N| \geqslant z)$$
où N suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour $z \simeq 1{,}96$, on obtient $\mathbb{P}(|N| \geqslant z) \simeq 5\%$.

En pratique, le théorème limite central donne de meilleurs résultats.

Exercice 4

On considère de nouveau la méthode de Monte-Carlo utilisée dans l'exercice 2 pour approcher $\frac{\pi}{4}$.

1. Quelle valeur de n choisir pour que $\overline{g}_n$ soit une valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$ à la précision $\varepsilon = 10^{-2}$ avec un risque $\alpha = 5\%$?
2. Comment vérifier expérimentalement le résultat précédent ? Mettre cette méthode en pratique.