Informatique

TP 6

Fonctions de plusieurs variables

Dans tout le TP, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x, y)$ désigne une fonction de deux variables. Pour toutes les applications, on considérera la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x^3 + y^2)\mathbf{e}^{-x^2-y^2}$.
On utilisera plusieurs scripts Scilab contenus dans une archive `tp6.zip` à télécharger en ligne.

Partie 1 : graphe et lignes de niveau

Pour représenter graphiquement la fonction f sur le domaine $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, on considère une subdivision $(x_i)_i$ du segment $[a_1, b_1]$ et une subdivision $(y_j)_j$ du segment $[a_2, b_2]$, à partir desquelles on constitue un maillage $\big((x_i, y_j)\big)_{i,j}$ du domaine $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, puis on place et on relie les points de l'espace de coordonnées $(x_i, y_j, z_{i,j})$ où, pour tout (i, j), $z_{i,j} = f(x_i, y_j)$.
Pour ce faire, Scilab propose l'instruction `plot3d(x,y,z)` où `x` et `y` sont des matrices lignes admettant respectivement n_1 et n_2 éléments et `z` une matrice $n_1 \times n_2$.
Afin d'éviter d'avoir à calculer la matrice `z`, on dispose également de l'instruction `fplot3d(x,y,f)` où le troisième argument est la fonction f à représenter.

Exercice 1

1. Représenter graphiquement la fonction $f : (x, y) \longmapsto (x^3 + y^2)\mathbf{e}^{-x^2-y^2}$ sur $[-4, 4]^2$.
2. Exécuter le script `tp6_repr.sce` avec l'option `opt=0` qui produit un graphe de la même fonction avec des options graphiques plus adaptées.

L'instruction `contour(x,y,f,v)` trace les lignes de niveau du graphe obtenu par l'instruction `fplot3d(x,y,f)` aux niveaux contenus dans le vecteur `v`. L'argument `v` peut être remplacé par un nombre de lignes de niveaux que Scilab choisira alors automatiquement.

Exercice 2

1. Représenter les lignes de niveau de f sur $[-4, 4]^2$.
2. Exécuter le script `tp6_repr.sce` avec l'option `opt=2` puis `opt=1`.

Partie 2 : gradient

Un champ de vecteur sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ est une application

$$\mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \mathrm{X} \longmapsto \mathrm{V}(\mathrm{X}) = \big(\mathrm{V}_x(\mathrm{X}), \mathrm{V}_y(\mathrm{X})\big)$$

à valeurs vectorielles, où V_x et V_y sont donc deux fonctions $\mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$. Le gradient d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ est un champ de vecteurs sur $\mathcal{U}$.
Pour représenter un champ de vecteurs V sur un domaine $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, Scilab propose l'instruction `champ(x,y,vx,vy)`, où `x` et `y` sont des matrices lignes à n_1 et n_2 colonnes qui définissent un maillage du domaine $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ et `vx` et `vy` sont des matrices $n_1 \times n_2$ qui contiennent les valeurs des fonctions V_x et V_y en chaque point du maillage.

Exercice 3

1. Représenter le champ de vecteur gradient de la fonction $f : (x, y) \longmapsto (x^3 + y^2)\mathbf{e}^{-x^2-y^2}$ sur $[-4, 4]^2$.
2. Exécuter le script `tp6_champ.sce` qui superpose ce champ aux lignes de niveau de f.

Interpréter la sortie graphique : direction et norme du gradient, positions relatives du gradient et des lignes de niveau, maximums et minimums locaux, points selles.

Partie 3 : approximations polynomiales

Exercice 4 : approximation affine

1. Superposer le graphe de la fonction f avec celui de son plan tangent au point $(1, 1)$.

2. Exécuter le script `tp6_dl.sce` avec l'option `ordre=1`pour tracer les plans tangents au graphe de f en chacun de ses points critiques. A-t-on des extremums locaux ? globaux ?

Exercice 5 : polynômes homogènes du second degré

On sait que, pour un polynôme du second degré à une variable $a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$, le comportement générique est dicté par le signe de a. Si $a > 0$, la représentation graphique de ce polynôme est une parabole tournée vers le haut, alors que si $a < 0$, elle est tournée vers le bas.
On considère un polynôme du second degré à deux variables

$$\mathrm{P}(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + k,$$

où a, b et c ne sont pas tous nuls. Comme dans le cas à une variable, le type de graphe obtenu ne dépend – quitte à faire un changement de repère – que des coefficients a, b et c, et on supposera donc d, e et k nuls dans la suite.
Le script `tp6_poly2.sce` choisit aléatoirement les coefficients a, b et c, représente graphiquement le polynôme P et indique les valeurs de $b^2 - 4ac$ et $a + c$. En exécutant plusieurs fois ce script, conjecturer le type de représentation obtenu en fonction du signe de $b^2 - 4ac$ et $a + c$.

Exercice 6 : approximation polynomiale du second degré

Exécuter le script `tp6_dl.sce` avec l'option `ordre=2` pour superposer le graphe de f et celui de la partie régulière de son développement limité d'ordre 2 aux points $(1, 1)$ et $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.