Informatique

TP 2

Suites, graphismes & distributions discrètes usuelles

Partie 1 : étude graphique des suites

Étant donnés deux vecteurs `x` et `y` de même taille, l'instruction `plot2d(x,y)` (resp. `plot2d(x,y,-1)`) a pour effet de relier (resp. d'afficher sans relier) dans le plan les points de coordonnées (x_k, y_k). On peut ainsi construire la représentation graphique d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, constituée des points de coordonnées (n, u_n), $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 : diagrammes en escargot

On considère une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I stable, un réel $u_0 \in \mathrm{I}$ et la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Dans un script contenant la définition de la fonction `f`, écrire une fonction `[x,y]=escargot(x0,n)` renvoyant le vecteur `x` des abscisses et celui `y` des ordonnées de la suite de points constituant le diagramme en escargot représentant la suite finie $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

2. Afficher le diagramme en escargot associé aux suites envisagées ci-dessous puis conjecturer leur comportement asymptotique et démontrer ces conjectures :

a. $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$;

b. $u_0 \in [0, 2]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$;

c. $u_0 > 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n^2 - 1}$.

Exercice 2 : dynamique des populations

On cherche à modéliser l'évolution de deux espèces en présence dans un milieu : une population de proies d'effectif $x(t)$ (en milliards) à la date t, et une population de prédateurs d'effectif $y(t)$ (en milliers) à la date t.

Les proies vivent dans un milieu riche en nourriture. Leur nombre $x(t)$ s'accroît donc automatiquement. L'accroissement est proportionnel au nombre d'individus (chaque couple d'individus engendre un certain nombre de « petits » à intervalles de temps réguliers, par exemple chaque année) ; l'accroissement sera donc $\alpha x(t)$ avec $\alpha > 0$. Mais les proies sont dévorées par les prédateurs. La diminution du nombre de proies est proportionnelle au nombre de rencontres entre une proie et un prédateur ; elle s'écrira donc $-\beta x(t)y(t)$ avec $\beta > 0$. Finalement, l'évolution du nombre de proies est donnée par l'équation $x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t)$.

De leur côté, les prédateurs sont incapables de se nourrir directement dans le milieu. Leur nombre $y(t)$ diminue donc automatiquement. La diminution est proportionnelle au nombre d'individus (une certaine proportion de la population meurt de faim à intervalles de temps réguliers) ; la diminution sera donc $-\gamma y(t)$ avec $\gamma > 0$. Mais les prédateurs se nourissent de proies. L'accroissement de leur population est proportionnel au nombre de rencontres entre un prédateur et une proie ; il s'écrira donc $\delta x(t)y(t)$ avec $\delta > 0$. Finalement, l'évolution du nombre de prédateurs est donnée par l'équation $y'(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t)$.

Au total, le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra correspond au système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy \\ y' = -\gamma y + \delta xy \end{cases}.$$

Volterra introduisit ce modèle en 1926 pour expliquer l'évolution périodique de deux espèces de poissons de la mer adriatique. Des équations de la même forme avaient été introduites en 1922 par Lotka en cinétique chimique.

Le traitement général de ce système est hors de portée. On peut néanmoins obtenir une solution approchée en *discrétisant* le problème : on se donne un petit intervalle de temps $h > 0$ et l'on remplace respectivement les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ par les taux d'accroissements $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ et $\frac{y(t+h)-y(t)}{h}$. Les réels x_n et y_n définis ci-dessous fournissent alors une approximation (moyennement bonne) de $x(nh)$ et $y(nh)$:

$$x_0 = x(0), \quad y_0 = y(0) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = x_n + h(\alpha x_n - \beta x_n y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h(-\gamma y_n + \delta x_n y_n) \end{cases}. \tag{1}$$

Dans un même script, définir les variables globales $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ puis implémenter les fonctions décrites ci-dessous.

1. Écrire une fonction `[u,v]=evolue(x,y,h)` où u et v sont définis par :

$$\begin{cases} u = x + h(\alpha x_n - \beta x_n y_n) \\ v = y + h(-\gamma y_n + \delta x_n y_n) \end{cases}.$$

2. Écrire une fonction `[x,y]=population(x0,y0,h,n)` qui renvoie les vecteurs `x` et `y` respectivement formés des termes x_k et y_k, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, des suites définies par (1).

3. On choisit $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $h = 10^{-3}$ et $n = 10^4$.

a. Construire les vecteurs `X` et `Y` contenant les termes x_k et y_k pour $0 \leqslant k \leqslant n$ des suites définies par (1).

b. Superposer sur une même figure les représentations graphiques des suites $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et $(y_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

c. Sur une autre figure, placer et relier les points de coordonnées (x_k, y_k), $0 \leqslant k \leqslant n$.

d. Que peut-on conjecturer ?

Partie 2 : représentation graphique des lois discrètes classiques

Étant donnés deux vecteurs `x` et `y` de même taille, l'instruction `bar(x,y)` a pour effet de tracer au-dessus de chaque abscisse x_k une barre verticale de hauteur y_k.

La fonction `cumsum` appliquée à un vecteur `x` renvoie le vecteur des sommes partielles associées. La fonction `cumprod` renvoie de même les produits partiels.

L'instruction `subplot` a pour effet de partager la fenêtre graphique en plusieurs sous-fenêtres indépendantes : par exemple,

```
clf  // nettoie la fenêtre graphique
subplot(121)
    // instructions graphiques pour la sous-fenêtre de gauche
subplot(122)
    // instructions graphiques pour la sous-fenêtre de droite
```

Exercice 3 : distribution géométrique

On considère une variable X de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Dans un même script,

1. Écrire une fonction `y=distrib_geometrique(n,p)` renvoyant le vecteur $y = (y_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ formé des probabilités $y_k = \mathbb{P}(X = k)$.

2. Représenter la loi de X pour $p = \frac{1}{2}$.

3. Sur la même fenêtre graphique, ajouter un graphique représentant la fonction de répartition de X.

4. Essayer avec d'autres valeurs de p. Quelle est l'influence du paramètre p sur la distribution ?

Exercice 4 : distribution poissonienne

On considère une variable X de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Dans un même script,

1. Écrire une fonction `y=distrib_poisson(n,lambda)` renvoyant le vecteur $y = (y_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ formé des probabilités $y_k = \mathbb{P}(X = k)$.

2. Sur deux sous-fenêtres graphiques voisines, représenter la loi de X sur $[\![0, 25]\!]$ pour $\lambda = 5$ et $\lambda = 15$. Comparer les deux distributions : position de la « bosse », taille de sa base ?

Exercice 5 : distribution binomiale

On considère une variable X de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Dans un même script,

1. Écrire une fonction `y=distrib_binomiale(n,p)` renvoyant le vecteur $y = (y_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ formé des probabilités $y_k = \mathbb{P}(X = k)$.
Indication. On pourra exprimer $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X = k - 1)$.

2. Représenter la loi de X pour $n = 30$ et différentes valeurs de p.