Devoir libre 9
Eléments de correction

Première partie

1. a. On lit sur la matrice A les expressions de $a(e_1) = e_2$ et de $a^2(e_1) = a(e_2) = e_3$. Puisque la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de E, la famille $\big(e_1, a(e_1), a^2(e_1)\big)$ est donc génératrice, ce qui assure que l'endomorphisme a est cyclique.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2$ puis une permutation des colonnes $(C_3 \to C_1 \to C_2 \to C_3)$ montre que :

$$\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} P(\lambda) & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $P(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda - 11\lambda + 6$ (observer le lien avec la dernière colonne de A). L'endomorphisme a admet donc trois valeurs propres : 1, 2 et 3. Comme E est de dimension 3, il est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites, dont on détermine aisément par le calcul des vecteurs directeurs ; il vient successivement :

$$u_1 = 6e_1 - 5e_2 + e_3, \qquad u_2 = 3e_1 - 4e_2 + e_3 \qquad \text{et} \qquad u_3 = 2e_1 - 3e_2 + e_3.$$

Puisque a est diagonalisable, ses sous-espaces propres sont supplémentaires dans E ; la famille (u_1, u_2, u_3) est donc une base de E. Par suite, la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (u_1, u_2, u_3) est inversible et l'on a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

d'après la formule de changement de base.

b. On obtient de même $b(e_1) = e_2$ et $b^2(e_1) = e_3$ d'où l'on déduit que l'endomorphisme b est cyclique. Les mêmes opérations sur $\operatorname{rg}(b - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ qu'en **a.** montrent que les valeurs propres de b sont les racines du polynôme $-\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$: 1 et -1. On vérifie que $B - I_3$ et $B + I_3$ sont toutes les deux de rang 2 si bien, d'après le théorème du rang appliqué à $b - \mathrm{id}_E$ et $b + \mathrm{id}_E$, que $E_1(b)$ et $E_{-1}(b)$ sont de dimension 1. Dans ces conditions,

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} b} \dim E_\lambda(b) = \dim E_1(b) + \dim E_{-1}(b) = 2 < 3$$

et l'endomorphisme b n'est pas diagonalisable.

2. a. On obtient par une récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad c^k(x_i) = \lambda_i^k x_i.$$

Par suite,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad c^k(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k x_i.$$

Si $\mu_0, \dots, \mu_{n-1}$ sont n scalaires tels que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k c^k(x_0) = 0,$$

on a donc

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k x_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \lambda_i^k \Big) x_i.$$

Puisque la famille $(x_1, \ldots, x_n)$, formée de vecteurs propres de c associés à des valeurs propres deux-à-deux distinctes, est libre, cela implique :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \lambda_i^k = 0$$

ou, en d'autres termes, que les n scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, deux-à-deux distincts, sont racines du polynôme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \mathrm{X}^k,$$

de degré inférieur ou égal à $n-1$. Ce polynôme est donc nul, ce qui signifie que $\mu_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a ainsi établit que la famille $\big(x_0, c(x_0), \ldots, c^{n-1}(x_0)\big)$ est libre.

b. La famille $\big(x_0, c(x_0), \ldots, x^{n-1}(x_0)\big)$ étant libre formée de n vecteurs dans E de dimension n, c'est une base de E. Elle en est en particulier génératrice, d'où l'on déduit que c est cyclique.

Deuxième partie

1. a. Pour $j = n$, on a une famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^n(x_0)\big)$ formée de $n+1$ vecteurs dans l'espace E de dimension n, qui est nécessairement liée. L'ensemble des entiers j pour lesquels la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^j(x_0)\big)$ est liée est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$; à ce titre, elle admet un plus petit élément m. Par définition, la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$ est alors libre.

b. Puisque la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^m(x_0)\big)$ est liée alors que la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$ est libre, le vecteur $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire de la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$. Le résultat est donc acquis pour $k = 0$. S'il l'est pour un entier $k \geqslant 0$, alors il existe des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}$ tels que :

$$f^{m+k}(x_0) = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j f^j(x_0)$$

et alors

$$f^{m+k+1}(x_0) = f\big(f^{m+k}(x_0)\big) = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j f^{j+1}(x_0) = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_{j-1} f^j(x_0) + \lambda_{m-1} f^m(x_0)$$

appartient au sous-espace Vect $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$ puisqu'il en est ainsi de $f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$ et de $f^m(x_0)$ d'après le cas $k = 0$. Ce vecteur $f^{m+k+1}(x_0)$ est donc lui aussi combinaison linéaire de la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$, ce qui constitue le résultat au rang $k+1$. On conclut par le principe de récurrence.

c. Puisque tous les vecteurs $f^k(x_0)$, $k \in \mathbb{N}$, qui forment par hypothèse une famille génératrice de E, sont combinaisons linéaires de la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$ d'après la question **b.**, celle-ci est génératrice de E. Comme elle est également libre d'après la question **a.**, c'est une base de E. Elle est donc formée de n vecteurs, ce qui assure que $m = n$.

2. a. Il vient immédiatement :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & p_0 \\ 1 & \ddots & (0) & \vdots & p_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & p_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & p_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}).$$

b. Pour $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$, la relation

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k = 0,$$

(dans $\mathbf{L}(\mathrm{E})$) implique

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0,$$

qui implique à son tour $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ puisque la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$ est libre par construction. La famille $(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}, f, \ldots, f^{n-1})$ est donc libre dans $\mathbf{L}(\mathrm{E})$. Par suite, le seul polynôme annulateur de f de degré strictement inférieur à n est le polynôme nul.

c. On a tout d'abord, par définition de P, $\big(\mathrm{P}(f)\big)(x_0) = 0$. Puis, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, les endomorphismes f^k et $\mathrm{P}(f)$ commutent en tant que polynômes en f, et l'on a alors

$$\big(\mathrm{P}(f)\big)\big(f^k(x_0)\big) = f^k\big[\big(\mathrm{P}(f)\big)(x_0)\big] = f^k(0) = 0.$$

L'endomorphisme $\mathrm{P}(f)$, dont on vient de voir qu'il envoie tous les vecteurs de la base $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\big)$ sur 0, est donc nul, ce qui signifie que P est un polynôme annulateur de f.

3. a. On obtient, par une récurrence immédiate, $f^k(x) = \lambda^k x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où l'on tire, puisque P annule f d'après la question **2.c.** :

$$0 = \big(\mathrm{P}(f)\big)(x) = f^n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} p_k f^k(x) = \lambda^n x - \sum_{k=0}^{n-1} p_k \lambda^k x = \mathrm{P}(\lambda)x.$$

Puisque x est non nul en tant que vecteur propre, on en déduit que $\mathrm{P}(\lambda) = 0$.

b. D'après la question **2.a.**, l'endomorphisme $f - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}$ est représenté dans la base $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\big)$ par la matrice

$$\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & p_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & p_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & p_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & p_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Les $n-1$ premières colonnes de cette matrice étant linéairement indépendantes (système échelonné), on a déjà $\mathrm{rg}(f - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) \geqslant n-1$ ou en d'autres termes, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) \leqslant 1$. Mais le sous-espace $\mathrm{E}_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})$ n'est pas réduit à $\{0\}$ puisque λ est valeur propre de f. C'est donc un sous-espace de dimension 1.

c. L'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si,

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp} f} \dim \mathrm{E}_\lambda(f) = n.$$

Or, dans la somme précédente, tous les termes sont égaux à 1 d'après la question **b.**. Pour que la somme ci-dessus soit égale à n, il faut et il suffit donc qu'elle comporte n termes, c'est-à-dire que f admette n valeurs propres deux-à-deux distinctes.

4. a. L'application nulle commute avec f puisque f est linéaire, de sorte que $f(0) = 0$. Si g, h commutent avec f alors, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a par linéarité de f :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \begin{aligned} \big(f \circ (\lambda g + h)\big)(x) &= f\big(\lambda g(x) + h(x)\big) = \lambda f\big(g(x)\big) + f\big(h(x)\big) \\ &= \lambda g\big(f(x)\big) + h\big(f(x)\big) = \big((\lambda g + h) \circ f\big)(x), \end{aligned}$$

d'où $f \circ (\lambda g + h) = (\lambda g + h) \circ f$, i.e. $\lambda g + h \in \mathrm{C}(f)$. De même,

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ (h \circ f) = (g \circ h) \circ f$$

et $g \circ h \in \mathrm{C}(f)$.

Ainsi $\mathrm{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}(\mathrm{E})$ stable par $\circ$.

b. Si $g, h \in \mathrm{C}(f)$ sont tels que $g(x_0) = h(x_0)$, alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, g et h commutent à f^k de sorte que

$$g\big(f^k(x_0)\big) = f^k\big(g(x_0)\big) = f^k\big(h(x_0)\big) = h\big(f^k(x_0)\big)$$

et les applications linéaires g et h, qui coïncident sur les vecteurs de la base $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$, sont donc égales.

c. Par construction, les applications linéaires g et $\sum_j a_j f^j$, qui commutent toutes les deux avec f, coïncident en x_0. Elles sont donc égales d'après **b.**.

d. D'après la question **c.**, la famille $(\mathrm{id}_\mathrm{E}, f, \dots, f^{n-1})$ engendre $\mathrm{C}(f)$. Comme est libre d'après la question **2.b.**, c'est donc une base de $\mathrm{C}(f)$, lequel sous-espace de $\mathbf{L}(\mathrm{E})$ est donc de dimension n.