Devoir libre 7 (facultatif)

Eléments de correction

Première partie

1. a. Soit y une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. La fonction $z : x \longmapsto \mathbf{e}^{-ax}y(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ avec :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad z'(x) = \big(y'(x) - ay(x)\big)\mathbf{e}^{-ax}. \tag{1}$$

D'autre part, le théorème fondamental assure que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad z(x) = z(1) + \int_1^x z'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

On démontre alors l'équivalence demandée par double implication :

- Si y est solution de (E_f), alors (1) et (2) donnent :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad y(x) = \mathbf{e}^{ax}z(x) = \mathbf{e}^{ax}\Big(z(1) - \int_1^x f(t)\mathbf{e}^{-at}\,\mathrm{d}t\Big).$$

- Réciproquement, s'il existe $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad y(x) = \mathbf{e}^{ax}\Big(\mathrm{K} - \int_1^x \mathbf{e}^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t\Big),$$

alors

$$z : x \in \mathrm{I} \longmapsto \mathbf{e}^{-ax}y(x) = \mathrm{K} - \int_1^x \mathbf{e}^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable, de dérivée $x \longmapsto -f(x)\mathbf{e}^{-ax}$ d'où l'on déduit, par comparaison à (1), que y est solution de (E_f).

b. On suppose que y est une solution bornée de (E_f). D'après **a.**, il existe $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad y(x) = \mathbf{e}^{ax}\Big(\mathrm{K} - \int_1^x \mathbf{e}^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t\Big).$$

On a alors, en notant M un réel tel que $|y(x)| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$\Big|\mathrm{K} - \int_1^x \mathbf{e}^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \mathrm{M}\mathbf{e}^{-ax} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Il en résulte qu'on a nécessairement

$$\mathrm{K} = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \mathbf{e}^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où l'unicité de y.

c. La fonction $t \longmapsto \mathbf{e}^{-at}f(t)$ est continue sur $[1, +\infty[$. Par ailleurs, puisque f est bornée, on a $\mathbf{e}^{-at}f(t) = \mathscr{O}(\mathbf{e}^{-at})$ lorsque $t \to +\infty$, d'où l'on déduit la convergence absolue de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathbf{e}^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathbf{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$, convergente puisque $a > 0$.

d. La fonction g est solution de (E_f) d'après **a.** car on peut écrire, d'après **c.** :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad g(x) = \mathbf{e}^{ax}\Big(\int_1^{+\infty} \mathbf{e}^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^x \mathbf{e}^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t\Big).$$

De plus, cette solution est bornée car, en notant M un réel tel que $|f(t)| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $t \in \mathrm{I}$, on a :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |g(x)| = \mathbf{e}^{ax}\Big|\int_x^{+\infty} \mathbf{e}^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \mathbf{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \mathbf{e}^{-at}\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}\mathbf{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \mathbf{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{M}}{a}.$$

Ceci établit l'existence d'une solution bornée. L'unicité a été obtenue en **b.**.

2. a. En notant $\mathbb{1}$ la fonction identiquement égale à 1, on a :

$$\mathrm{U}(\mathbb{1}) : x \in \mathrm{I} \longmapsto \mathbf{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \mathbf{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}.$$

b. Vu la formule obtenue en **1.d.**, l'application U est linéaire par linéarité de l'intégrale. De plus si $f \in \mathrm{E}$, alors $\mathrm{U}(f)$ est $\mathscr{C}^1$ et bornée par définition donc appartient à E. L'application U est donc un endomorphisme de E.

c. L'endomorphisme U est injectif car si $f \in \mathrm{E}$ appartient au noyau de U, alors la fonction $\mathrm{U}(f) = 0$ est solution de (E_f), ce qui signifie que $f = -\mathrm{U}(f)' + a\mathrm{U}(f) = 0$.

d. En intégrant par parties sur un segment $[x, y] \subset [1, +\infty[$, puisque $t \longmapsto -\mathbf{e}^{-at} g(t)$ est une primitive de $t \longmapsto \mathbf{e}^{-at} f(t)$, il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_x^y \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \mathbf{e}^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \mathbf{e}^{-at} g(t)\right]_x^y + \int_x^y \frac{(t-x)^n}{n!} \mathbf{e}^{-at} g(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où, puisque la fonction g est bornée d'après **1.d.** :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \mathbf{e}^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \mathbf{e}^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{e}^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} \mathbf{e}^{-at} g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Dès lors, une démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ du prédicat

$$\mathcal{P}_n : \quad « \forall f \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{U}^{n+1}(f) : x \in [1, +\infty[\longmapsto \mathbf{e}^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} \mathbf{e}^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t »$$

(noter que l'on envisage *toutes* les fonctions de E dans le prédicat !) est possible. Le résultat a été démontré au rang $n = 0$ à la question **1.d.**. Par ailleurs, s'il est acquis au rang $n \in \mathbb{N}$, alors la formule (3) indique que la fonction

$$g_{n+1} : x \longmapsto \mathbf{e}^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \mathbf{e}^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est égale à $g_{n+1} = \mathrm{U}^{n+1}(g) = \mathrm{U}^{n+1}\big(\mathrm{U}(f)\big) = \mathrm{U}^{n+2}(f)$ d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $g = \mathrm{U}(f)$. Le résultat est donc encore valable au rang n et l'on conclut par le principe de récurrence.

3. a. Pour $k \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction f_k appartient bien à E et :

$$\mathrm{U}(f_k) : x \in \mathrm{I} \longmapsto \mathbf{e}^{ax} \int_x^{+\infty} \mathbf{e}^{-(a+k)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a+k} \mathbf{e}^{-kx}.$$

On a donc $\mathrm{U}(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k$.

b. Pour $\lambda \in \left]0, \frac{1}{a}\right]$, le réel $k = \frac{1}{\lambda} - a > 0$ vérifie $\frac{1}{a+k} = \lambda$ si bien, d'après **a.**, que f_k appartient au sous-espace $\mathrm{Ker}(\mathrm{U} - \lambda\,\mathrm{id})$, qui est donc non nul.

c. Par une récurrence immédiate, on montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{U}^n(f_k)(x) = \frac{1}{(a+k)^n} \mathbf{e}^{-kx} \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } a+k > 1 \\ \mathbf{e}^{-kx} & \text{si } a+k = 1 \\ +\infty & \text{si } a+k < 1 \end{cases}.$$

4. a. Tout d'abord, les fonctions sin et cos appartiennent à E.

- Pour le calcul de leurs images par U, le plus rapide est de remarquer (en calculant $\sin' - \sin$...) que sin est solution bornée de l'équation $(\mathrm{E}_{-\cos + \sin})$ et cos de $(\mathrm{E}_{\sin + \cos})$. On obtient alors les expressions de U(cos) et U(sin) en résolvant le système linéaire :

$$\begin{cases} \mathrm{U}(-\cos + \sin) = \sin \\ \mathrm{U}(\sin + \cos) = \cos \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{U}(\sin) - \mathrm{U}(\cos) = \sin \\ \mathrm{U}(\sin) + \mathrm{U}(\cos) = \cos \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{U}(\sin) = \frac{\sin + \cos}{2} \\ \mathrm{U}(\cos) = \frac{\cos - \sin}{2} \end{cases}.$$

- On peut aussi faire le calcul brutal de l'expression intégrale grâce à deux intégrations par parties successives sur un segment $[x, y] \subset [x, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \int_x^y \mathbf{e}^{-t} \sin t\,\mathrm{d}t &= \left[-\mathbf{e}^{-t} \sin t\right]_x^y + \int_x^y \mathbf{e}^{-t} \cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\mathbf{e}^{-t} \sin t - \mathbf{e}^{-t} \cos t\right]_x^y - \int_x^y \mathbf{e}^{-t} \sin t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

d'où :

$$\int_x^y \mathbf{e}^{-t} \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[-\mathbf{e}^{-t} \sin t - \mathbf{e}^{-t} \cos t\right]_x^y \xrightarrow[y \to +\infty]{} \frac{1}{2} \mathbf{e}^{-x}(\sin x + \cos x)$$

et finalement

$$\mathrm{U}(\sin) : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbf{e}^x \int_x^{+\infty} \mathbf{e}^{-t} \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{\sin x + \cos x}{2}.$$

b. D'après **a.**, $\mathrm{U}(\sin)$ et $\mathrm{U}(\cos)$ appartiennent à P. Comme sin et cos engendrent P, cela suffit pour assurer que P est stable par U.
Les vecteurs sin et cos étant clairement linéairement indépendants, ils forment une base de $\mathrm{P} = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$, dans laquelle l'endomorphisme $\mathrm{U_P}$ est représenté par la matrice

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'après la question **a.**.

c. Le calcul donne :

$$\mathrm{M}^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}^3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie enfin que $\mathrm{M}^4 = -\frac{1}{4}\mathrm{I}_2$ si bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{M}^{4n} = \frac{(-1)^n}{4^n}\mathrm{I}_2, \quad \mathrm{M}^{4n+1} = \frac{(-1)^n}{4^n}\mathrm{M}, \quad \mathrm{M}^{4n+2} = \frac{(-1)^n}{4^n}\mathrm{M}^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{M}^{4n+3} = \frac{(-1)^n}{4^n}\mathrm{M}^3.$$

Ainsi toute suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de coefficients de M^n vérifie $|\gamma_n| \leqslant \frac{1}{4^{n/4}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc converge vers 0.

5. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on commence par justifier que φ_n appartient à E en étudiant brièvement ses variations pour s'assurer qu'elle est bornée. Puis, partant de la relation $\varphi_n' = -\varphi_n + n\varphi_{n-1}$, une intégration par parties sur un segment $[x, y] \subset [x, +\infty[$ donne :

$$\int_x^y \mathbf{e}^{-at}\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{\mathbf{e}^{-at}}{a}\varphi_n(t)\Big]_x^y + \frac{1}{a}\int_x^y \mathbf{e}^{-at}\big(-\varphi_n(t) + n\varphi_{n-1}(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

d'où, en passant à la limite lorsque $y \to +\infty$,

$$a\int_x^{+\infty} \mathbf{e}^{-at}\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{e}^{-ax}\varphi_n(x) - \int_x^{+\infty} \mathbf{e}^{-at}\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t + n\int_x^{+\infty} \mathbf{e}^{-at}\varphi_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

et la relation $(a+1)\psi_n = \varphi_n + n\psi_{n-1}$.

b. Pour la stabilité, on démontre par récurrence à partir de la formule de la question **a.** que $\psi_n \in \mathrm{F}_p$ pour tout $n \in [\![0, p]\!]$. Il reste à démontrer que la famille $(\varphi_n)_{0\leqslant n\leqslant p}$ est libre : une relation de liaison $\sum_n a_n\varphi_n = 0$ implique $\sum_n a_n x^n = 0$ pour tout $x \geqslant 1$, d'où l'on déduit que le polynôme $\sum a_n\mathrm{X}^n$ admet une infinité de racines, si bien que ses coefficients a_n sont tous nuls.

c. La question **3.a.** donne l'expression de $\mathrm{U}_2(\varphi_0) = \mathrm{U}(f_1) = \frac{1}{a+1}f_1 = \frac{1}{a+1}\varphi_0$ et la formule de la question **a.** permet alors de calculer $\mathrm{U}_2(\varphi_1)$ puis $\mathrm{U}_2(\varphi_2)$ pour obtenir

$$\mathrm{T}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 & 2\alpha^3 \\ 0 & \alpha & 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{1}{a+1}.$$

Pour calculer les puissances de cette matrice triangulaire (dont tous les coefficients diagonaux sont égaux), on écrit $\mathrm{T}_2 = \alpha\mathrm{I}_3 + \mathrm{N}$ où

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 & 2\alpha^3 \\ 0 & 0 & 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec :

$$\mathrm{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{N}^3 = 0.$$

Comme par ailleurs $\alpha\mathrm{I}_3$ et N commutent, on peut conclure par la formule du binôme de Newton :

$$\mathrm{T}_2^n = (\alpha\mathrm{I}_3 + \mathrm{N})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\alpha^{n-k}\mathrm{N}^k = \alpha^n\mathrm{I}_2 + n\alpha^{n-1}\mathrm{N} + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2}\mathrm{N}^2.$$

Ainsi

$$\mathrm{T}_2^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n+1} & n(n+1)\alpha^{n+2} \\ 0 & \alpha^n & 2n\alpha^{n+1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$$

et l'on constate ici encore que les coefficients de T_2^n convergent vers 0 lorsque $n \to \infty$ car $|\alpha| < 1$.

6. Il suffit de faire le changement de variable affine $t = u + x$ dans l'expression intégrale de $U(f)(x)$.

7. a. C'est immédiat par inégalité triangulaire sur l'expression intégrale : pour $f \in E$, on a :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad |U(f)(x)| = \mathbf{e}^{ax}\left|\int_x^{+\infty} \mathbf{e}^{-at} f(t)\,dt\right| \leqslant \mathbf{e}^{-ax}\int_x^{+\infty} \mathbf{e}^{-at}\,|f(t)|\,dt = U(|f|)(x).$$

b. C'est immédiat sur l'expression intégrale.

c. Si φ est décroissante, alors

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \psi(x) = \mathbf{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \mathbf{e}^{-at}\varphi(t)\,dt \leqslant \mathbf{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \mathbf{e}^{-at}\varphi(x)\,dt = \frac{\varphi(x)}{a}$$

d'où $a\psi - \varphi \leqslant 0$. Comme ψ est solution de (E_φ) par définition, on a alors $\psi' - a\psi = -\varphi$ d'où $\psi' = a\psi - \varphi \leqslant 0$, si bien que ψ est décroissante.

8. a. Pour $f \in E_1$ et $x \geqslant 1$, il vient par intégration par parties (d'abord sur un segment, on commence à avoir l'habitude...) :

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-at} f'(x+t)\,dt = \left[\mathbf{e}^{-at} f(x+t)\right]_0^{+\infty} + a\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-at} f(x+t)\,dt$$

d'où, d'après la question **6.**, la relation $U(f') = -f + aU(f)$.

b. Puisque $U(f)$ est solution de (E_f), on a donc $U(f') = -f + aU(f) = U(f)'$, d'où le résultat.

c. Si $f \in E_1$ est positive et décroissante, alors d'après **b.** et **7.b.** $U(f)' = U(f') \leqslant 0$, si bien que $U(f)$ est décroissante.

Deuxième partie

1. a. On peut noter pour commencer que le théorème de comparaison des intégrales généralisées justifie la convergence absolue de l'intégrale $\int_x^{+\infty} \alpha(t)\,dt$ pour tout $x \geqslant 1$ dans les conditions considérées. Pour $\varepsilon > 0$ donné, l'hypothèse $\alpha(x) = o\big(\beta(x)\big)$ lorsque $x \to +\infty$ assure l'existence d'un réel $A \geqslant 1$ tel que pour tout $x \geqslant A$, $|\alpha(x)| \leqslant \varepsilon\beta(x)$. On a alors :

$$\forall x \geqslant A, \quad \left|\int_x^{+\infty} \alpha(t)\,dt\right| \leqslant \int_x^{+\infty} |\alpha(t)|\,dt \leqslant \varepsilon\int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt,$$

ce qui établit la relation

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t)\,dt = o\Big(\int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt\Big), \quad x \to +\infty.$$

b. Si $\alpha(x) \sim \beta(x)$ lorsque $x \to +\infty$, alors $\alpha(x) - \beta(x) = o\big(\beta(x)\big)$ lorsque $x \to +\infty$. Puisque $\beta(x) > 0$ pour tout $x \in I$ et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \beta(t)\,dt$ converge par hypothèse, le résultat de la question **a.** s'applique et assure que :

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t)\,dt - \int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt = \int_x^{+\infty} \big(\alpha(t) - \beta(t)\big)\,dt = o\Big(\int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt\Big), \quad x \to +\infty,$$

ce qui signifie que

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t)\,dt \sim \int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt, \quad x \to +\infty.$$

2. • Si $f(x)$ tend vers 0 i.e. $f(x) = o(1)$ lorsque $x \to +\infty$, alors $\mathbf{e}^{-ax} f(x) = o(\mathbf{e}^{-ax})$ lorsque $x \to +\infty$ ce qui implique, d'après **1.a.**, puisque $\mathbf{e}^{-ax} \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 1$ et que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \mathbf{e}^{-at}\,dt$ converge,

$$\int_x^{+\infty} \mathbf{e}^{-at} f(t)\,dt = o\Big(\int_x^{+\infty} \mathbf{e}^{-at}\,dt\Big) = o(\mathbf{e}^{-ax}), \quad x \to +\infty.$$

On en déduit dans ce cas que

$$U(f)(x) = \mathbf{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \mathbf{e}^{-at} f(t)\,dt = o(1), \qquad x \to +\infty,$$

c'est-à-dire que $U(f)(x)$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.

- Si f admet une limite finie b en $+\infty$, alors le résultat précédent peut être appliqué à la fonction $\widetilde{f} = f - b$, de limite nulle en $+\infty$:

$$\mathrm{U}(\widetilde{f})(x) = \mathrm{U}(f)(x) - b\mathrm{U}(\mathbb{1})(x) = \mathrm{U}(f)(x) - \frac{b}{a} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

si bien que $\mathrm{U}(f)(x)$ tend vers $\frac{b}{a}$ lorsque $x \to +\infty$.

3. La notation f_ω est bien mal choisie puisqu'elle entre en conflit avec celle de la question **I.3.**...

a. On peut bien sûr obtenir le résultat par intégration par parties, mais aussi par application du résultat de la question **I.8.a.** : en remarquant que $f_\omega' = -\omega f_{\omega+1}$, il vient

$$a\mathrm{U}(f_\omega) = f_\omega + \mathrm{U}(f_\omega') = f_\omega - \omega \mathrm{U}(f_{\omega+1})$$

d'où la relation :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad g_\omega(x) = \frac{f_\omega(x)}{a} - \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x). \tag{4}$$

Comme par ailleurs $f_{\omega+1}(x) = o\big(f_\omega(x)\big)$ lorsque $x \to +\infty$, on justifie (comme en **2.**) en s'appuyant sur le résultat de la question **1.a.** que $g_{\omega+1}(x) = o\big(g_\omega(x)\big)$ lorsque $x \to +\infty$. Il ressort alors de (4) que $g_\omega(x) \sim \frac{1}{a} f_\omega(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

b. Pour $x \geqslant 1$ donné,

$$\forall t \in [1, x], \quad \frac{\mathbf{e}^{-at} - 1}{t} = \frac{1}{t}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-at)^n}{n!} - 1\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} t^{n-1},$$

et il s'agit de justifier l'intégration terme à terme dans la formule :

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\mathbf{e}^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t - \ln x &= \int_1^x \frac{\mathbf{e}^{-at} - 1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} t^{n-1}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^x \frac{(-a)^n}{n!} t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{n \cdot n!}(x^n - 1),\end{aligned}$$

c'est-à-dire de montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_1^x \frac{(-a)^k}{k!} t^{k-1}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_1^x \frac{\mathbf{e}^{-at} - 1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour $t \geqslant 0$ donné, la fonction $\varphi : u \longmapsto \mathbf{e}^{-au}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, t]$ avec :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall u \in [0, t], \quad \varphi^{(k)}(u) = (-a)^k \mathbf{e}^{-au}$$

et donc :

$$\forall u \in [0, t], \quad \big|\varphi^{(n+1)}(u)\big| \leqslant a^{n+1}.$$

On peut donc lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n :

$$\Big|\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k\Big| \leqslant \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\Big|\int_1^x \frac{\mathbf{e}^{-at} - 1}{t}\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \int_1^x \frac{(-a)^k}{k!} t^{k-1}\,\mathrm{d}t\Big| &= \Big|\int_1^x \frac{1}{t}\Big(\mathbf{e}^{-at} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-a)^k}{k!} t^k\Big)\,\mathrm{d}t\Big| \\ &\leqslant \int_1^x \frac{1}{t}\Big|\mathbf{e}^{-at} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-a)^k}{k!} t^k\Big|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \int_1^x t^n\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^{n+1}}{(n+1)\cdot(n+1)!}(x^{n+1} - 1) \leqslant \frac{(ax)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

et le résultat est établi. L'expression attendue pour g_1 s'en déduit immédiatement.

4. **a.** Évident à partir de **1.a.**.

b. Évident à partir de **1.b.** et **3.a.**.

Troisième partie

1. **a.** La question **I.3.a.** donne l'expression de $g_k : x \longmapsto \frac{1}{a+k}\mathbf{e}^{-kx}$, dont l'intégrale sur $[1, +\infty[$ est une intégrale de référence convergente puisque $k > 0$.

b. La fonction g_ω est continue sur $[1, +\infty[$ avec, d'après la question **II.3.a.**, $g_\omega(x) \sim \frac{1}{a}\frac{1}{x^\omega} \geqslant 0$ lorsque $x \to +\infty$. On en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g_\omega(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $\omega > 1$.

2. a. La fonction G étant une primitive de g d'après le théorème fondamental, on a $(\mathrm{G}' - a\mathrm{G})' = g' - ag = -f$ puisque g est solution de l'équation différentielle (E_f). Comme F est quant à elle une primitive de f, les deux fonctions $\mathrm{G}' - a\mathrm{G}$ et $-\mathrm{F} + g(1)$ ont donc même dérivée. Elles diffèrent donc d'une constante, nécessairement nulle puisque les deux fonctions prennent la même valeur $g(1)$ en 1.

b. Pour commencer, la fonction F est dérivable donc continue sur $[1, +\infty[$. La convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ signifie par ailleurs que la fonction F admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Étant de plus croissante car f est positive, F est donc à valeurs dans le segment $[\mathrm{F}(1), \ell]$. La fonction F est ainsi bornée et appartient donc à E.
Par définition de U, la fonction $\mathrm{H} = \mathrm{U}\big(\mathrm{F} - g(1)\big) = \mathrm{U}(\mathrm{F}) - \frac{g(1)}{a}$ vérifie $\mathrm{H}' - a\mathrm{H} = -\mathrm{F} + g(1)$. En comparant avec la relation (1) de l'énoncé, on en déduit que $\mathrm{G} - \mathrm{H}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$. Il existe donc une constante $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{G}(x) - \mathrm{H}(x) = \mathrm{K}\mathbf{e}^{ax}$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{G}(x) = \mathrm{K}\mathbf{e}^{ax} + \mathrm{U}(\mathrm{F})(x) - \frac{g(1)}{a}.$$

c. Puisque la fonction g est bornée d'après **I.1.d.**, il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $|g(x)| \leqslant \mathrm{M}$. On a alors :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |\mathrm{G}(x)| = \frac{1}{x}\Big|\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \frac{1}{x}\int_1^x |g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_1^x \mathrm{M}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}.$$

Il en ressort que la fonction $x \longmapsto \frac{\mathrm{G}(x)}{x}$ est bornée.

d. Comme on l'a déjà remarqué, la fonction F admet une limite finie en $+\infty$. Dans ces conditions, la question **II.2.** assure que U(F) admet également une limite en $+\infty$. Pour que la fonction $x \longmapsto \frac{\mathrm{G}(x)}{x}$ soit bornée, comme cela a été démontré en **c.**, il est donc nécessaire d'après la formule établie en **b.** que $\mathrm{K} = 0$.

e. Les éléments développés en **d.** montrent que G admet une limite finie en $+\infty$, ce qui signifie que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

3. D'après la question **I.7.a.**, on a $|g| = |\mathrm{U}(f)| \leqslant \mathrm{U}(|f|)$ d'où l'on déduit la convergence absolue de l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{U}(|f|)(t)\,\mathrm{d}t$, convergente d'après **2.e.**.