Devoir libre 15

À rendre lundi 11 mars 2019

Le problème traite de quelques propriétés des polynômes de HERMITE qui constituent une famille orthogonale pour un certain produit scalaire qui sera étudié dans ce problème .
On notera $\mathbb{R}[X]$ (resp.$\mathbb{R}_n[X]$) l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels (resp. l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n) y compris le polynôme nul.
Pour tout entier naturel k le polynôme X^k se confond avec la fonction polynomiale réelle $x \mapsto x^k$, en particulier X^0 est la fonction constante égale à 1.
On notera $[x]$ la partie entière d'un réel x.
Enfin on rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

Partie I

Trois résultats utiles par la suite.

1) a) Pour tout entier naturel n, justifier la convergence de l'intégrale

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

b) Etablir, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'égalité : $I_n = (n-1)\,I_{n-2}$.

c) Soit n un entier naturel. Donner la valeur de I_{2n+1} et montrer que $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

d) Pour toute fonction polynomiale P, justifier la convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

2) On rappelle que si une suite de terme général v_n est telle que les deux sous-suites de termes généraux v_{2n} et v_{2n+1} convergent vers le même réel l alors la suite (v_n) est elle-même convergente de limite l.

Soit C un réel positif. Pour tout entier naturel n on pose $u_n = \dfrac{C^n}{[\frac{n}{2}]!}$.

a) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{C^{2n}}{n!}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

b) Montrer que la série de terme général $u_{2k} + u_{2k+1}$ (où $k \in \mathbb{N}$) converge et donner sa somme.

c) En déduire la convergence de la série de terme général u_n et la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

3) Soit a un réel strictement positif et soit g une fonction réelle indéfiniment dérivable sur $[-a, a]$ pour laquelle existe un réel positif K tel que, pour tout entier n :

$$\underset{t\in[-a,a]}{Max} |g^{(n)}(t)| \leqslant \frac{K^n n!}{[\frac{n}{2}]!}$$

a) Montrer que pour tout $\lambda \in [-a, a]$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\lambda} \frac{(\lambda - t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)dt = 0$$

b) En déduire l'égalité suivante, valable pour tout $\lambda \in [-a, a]$:

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n$$

Quelle simplification obtient-on si g coïncide sur $[-a, a]$ avec une fonction polynomiale de degré d ?

PARTIE II

Les polynômes de Hermite.

1) Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}P(x)Q(x)\,dx$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On notera $\|.\|$ la norme associée.

Ainsi si n est un entier naturel, la restriction de ce produit scalaire aux polynômes de degré au plus n fait de $(\mathbb{R}_n[X],\langle .,.\rangle)$ un espace euclidien.

2) A l'aide de la base $(1,X,X^2,X^3)$ construire une base orthogonale de $(\mathbb{R}_3[X],\langle .,.\rangle)$ formée de polynômes dont le coefficient de plus haut degré est 1.

Pour tout entier naturel n on considère l'application H_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right)^{(n)}$$

où selon l'usage $f^{(n)}(x)$ désigne la valeur en x de la dérivée $n^{ième}$ de f (en particulier $f^{(0)}(x) = f(x)$).

3) a) Pour tout réel x calculer $H_0(x), H_1(x), H_2(x), H_3(x)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir les relations

$$H_{n+1} = XH_n - nH_{n-1} \tag{1}$$

et

$$H'_n = nH_{n-1} \tag{2}$$

Pour établir (1)*on pourra remarquer que* $\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right)^{(n+1)} = \left(-xe^{\frac{-x^2}{2}}\right)^{(n)}$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est une fonction polynomiale dont on précisera, en fonction de n, le degré, la parité et le coefficient de plus haut degré.

4. En Scilab, on assimile un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}X^k$ de degré n au vecteur $V = [a_1,\dots,a_{n+1}]$ de ses coefficients.
Écrire le code Scilab d'une `function H=Hermite(n)` qui renvoie le polynôme H_n.

PARTIE III

$(H_n)_{n\geqslant 0}$ comme famille de polynômes orthogonaux.

1) a) Montrer que si P est un polynôme et n un entier naturel non nul alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P(x)\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(n-1)} = 0$. De même on montrerait et **on admet** que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} P(x)\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(n-1)} = 0$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ calculer

$$\langle H_n, H_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Pour n non nul on utilisera la définition de H_n.

c) Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. En remarquant que

$$\langle H_n, H_m\rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(n)}dx$$

et à l'aide d'une intégration par parties qu'on effectuera avec soin montrer que

$$\langle H_n, H_m\rangle = m\langle H_{n-1}, H_{m-1}\rangle$$

En déduire que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut $\langle H_n, H_n\rangle$?

2) a) Soit $k \in \mathbb{N}$ et R une fonction polynomiale de degré au plus k ; Que vaut $\langle H_{k+1}, R\rangle$?

b) Soit n un entier naturel, k un entier vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$ et P un polynôme de degré au plus k. Etablir l'égalité

$$\left\|X^{k+1} - P\right\|^2 = \|H_{k+1}\|^2 + \|Q - P\|^2$$

où $Q = X^{k+1} - H_{k+1}$. *On pourra calculer* $\langle H_{k+1}, Q - P\rangle$.

Quelle est, dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}_{n+1}[X], \langle .,.\rangle)$, la projection orthogonale de X^{k+1} sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$?

c) On note $(G_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ la famille orthonormale de $(\mathbb{R}_{n+1}[X], \langle .,.\rangle)$ obtenue par le procédé de SCHMIDT à partir de la base $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$. Pour tout $k, 0 \leqslant k \leqslant n+1$, déterminer G_k en fonction de $H_0, H_1, \ldots, H_{n+1}$.

PARTIE IV

Un développement en série de Hermite.

Soit n un entier naturel non nul.

1) Soit P un polynôme de degré au plus n. Justifier l'égalité suivante :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \langle P, H_k\rangle \frac{H_k}{k!}$$

2) Pour tout couple (b, c) de réels vérifiant $b \leqslant c$ on **admet** qu'il existe un réel K (dépendant de b et c) tel que pour tout entier n et tout $x \in [b, c]$:

$$\left|\frac{H_n(x)}{n!}\right| \leqslant \frac{K^n}{[\frac{n}{2}]!}$$

a) Soit x un réel donné. A l'aide du 2) de la partie I établir, pour tout réel λ, la convergence de la série de terme général $\dfrac{H_n(x)}{n!}\lambda^n$.

b) Soit g_x (x est toujours un réel fixé) la fonction définie pour tout réel λ par $g_x(\lambda) = e^{-\frac{(\lambda - x)^2}{2}}$.

Pour tout réel λ et tout entier naturel n calculer $g_x^{(n)}(\lambda)$(c'est-à-dire $\dfrac{d^n g_x}{d\lambda^n}(\lambda)$) en fonction de H_n.

Montrer que g_x vérifie les hypothèses du 3) de la partie I et en déduire que pour tout $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2$

$$e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\lambda^n$$

c) On note exp la fonction $x \mapsto e^x$. Pour tout entier naturel n justifier rapidement la convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

dont, par analogie, on note $\langle \exp, H_n\rangle$ la valeur. Calculer $\langle \exp, H_n\rangle$ puis,pour tout réel x, conclure à l'égalité

$$\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle \exp, H_n\rangle \frac{H_n(x)}{n!}$$

Pour calculer $\langle \exp, H_n\rangle$ *on pourra utiliser la définition de* H_n *et intégrer par parties (avec soin) afin d'obtenir* $\langle \exp, H_n\rangle = \langle \exp, H_{n-1}\rangle$.