Devoir libre 14

À rendre lundi 4 mars 2019

Premier problème

Première partie : étude de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t$

On note $\mathrm{F} :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathrm{G} :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies, pour tout $x \in]0,+\infty[$, par :

$$\mathrm{F}(x) = \int_1^x \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(x) = \int_1^x \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

1. a. Montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \mathrm{F}(x) = -\frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

En déduire que F admet une limite finie en $+\infty$. On note α cette limite.

b. De manière analogue, montrer que G admet une limite finie en $+\infty$. On note β cette limite.

c. En déduire, pour tout $x \in]0,+\infty[$, la convergence des intégrales

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$$

et justifier les relations :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \alpha - \mathrm{F}(x) \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u = \beta - \mathrm{G}(x).$$

2. a. Montrer que :

$$\forall x, \mathrm{T} \in]0,+\infty[, \quad \int_0^{\mathrm{T}} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \cos x \int_x^{x+\mathrm{T}} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{x+\mathrm{T}} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

b. En déduire, pour tout $x \in]0,+\infty[$, la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t$$

et établir la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

On note $\mathrm{A} :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \mathrm{A}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

3. Montrer que la fonction A est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \mathrm{A}''(x) + \mathrm{A}(x) = \frac{1}{x}.$$

4. Établir que $\mathrm{A}(x)$ et $\mathrm{A}'(x)$ tendent vers 0 lorsque $x \to +\infty$.

5. a. Montrer que :

$$\forall x \in]0,1], \quad 0 \leqslant \int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant -\ln x.$$

b. En déduire que :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \right) = 0.$$

c. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$$

converge, et établir que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{A}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Deuxième partie : étude de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, établir la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^k \mathbf{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{B}_k :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \mathrm{B}_k(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k \mathbf{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. **a.** Montrer, en utilisant par exemple l'inégalité de Taylor-Lagrange, que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad |\mathbf{e}^u - 1 - u| \leqslant \frac{u^2}{2}\mathbf{e}^{|u|}.$$

b. En déduire, pour tout $x \in]0,+\infty[$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout réel h tel que $0 < |h| \leqslant \frac{x}{2}$:

$$\left|\frac{\mathrm{B}_k(x+h) - \mathrm{B}_k(x)}{h} + \mathrm{B}_{k+1}(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\mathrm{B}_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right).$$

c. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction B_k est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $\mathrm{B}_k' = -\mathrm{B}_{k+1}$.

d. En déduire que B_0 est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \mathrm{B}_0''(x) + \mathrm{B}_0(x) = \frac{1}{x}.$$

3. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, montrer que :

$$0 \leqslant \mathrm{B}_0(x) \leqslant \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant -\mathrm{B}_0'(x) \leqslant \frac{1}{x^2}$$

et en déduire les limites de $\mathrm{B}_0(x)$ et $\mathrm{B}_0'(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

4. **a.** Montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \mathbf{e}^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \leqslant \mathrm{B}_0(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

b. En déduire la limite de $\mathrm{B}_0(x)$ lorsque $x \to 0$, $x > 0$.

Troisième partie : calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

On considère la fonction $\varphi : x \in]0,+\infty[\longmapsto \mathrm{A}(x) - \mathrm{B}_0(x)$ où A et B_0 ont respectivement été définies dans les première et deuxième parties.

On définit également la fonction $\mathrm{U} : x \in]0,+\infty[\longmapsto \varphi(x)^2 + \varphi'(x)^2$.

1. Montrer que la fonction U est constante sur $]0,+\infty[$.

2. Quelle est la limite de $\mathrm{U}(x)$ lorsque $x \to +\infty$?

3. En déduire que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\mathrm{A}(x) = \mathrm{B}_0(x)$.

4. Quelle est la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\,?$$

Deuxième problème

Notations et définitions

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

- La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée 0_n.
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est nilpotente s'il existe un entier naturel non nul p tel que $M^p = 0_n$.
- Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre réelle de M. On note $\mathrm{SEP}(M, \lambda)$ le sous-espace propre de M associé à λ.
- On dit qu'une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive lorsqu'elle est symétrique et vérifie :
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXSX \geqslant 0.$$
- Soient $A, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que R est une racine carrée de A lorsqu'elle vérifie $R^2 = A$.

Le but de ce problème est d'étudier la notion de racine carrée d'une matrice dans quelques cas particuliers.

Partie I - Deux exemples

1. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Calculer $(R_\theta)^2$ et en déduire que la matrice I_2 admet une infinité de racines carrées.

2. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

Partie II - Racines carrées d'une matrice de la forme $\mathrm{I}_n + N$ avec N nilpotente

1. Donner le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de $t \longmapsto \sqrt{1+t}$.

On note $\sqrt{1+t} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \underset{t \to 0}{o}\left(t^3\right)$ ce développement limité.

2. Montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que :
$$1 + \mathrm{X} = (a_0 + a_1\mathrm{X} + a_2\mathrm{X}^2 + a_3\mathrm{X}^3)^2 + \mathrm{X}^4 Q(\mathrm{X}).$$

3. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $N^4 = 0_n$. Déduire de la question précédente une racine carrée de $\mathrm{I}_n + N$.

Partie III - Racines carrées d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres strictement positives et deux à deux distinctes

1. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$. On suppose de plus que f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.

a. Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g.

b. En déduire que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.

c. Justifier que f est diagonalisable.
Montrer que, pour toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f, la matrice associée à g relativement à la base $\mathcal{B}$ est diagonale. En déduire que g est diagonalisable.

2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles strictement positives et deux à deux distinctes.

a. Justifier l'existence d'une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

b. Donner un exemple de racine carrée de A. (On l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D.)

c. Soit R une racine carrée de A. Vérifier que $AR = RA$.
En déduire que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.

d. Établir que A admet exactement 2^n racines carrées.

Partie IV - Racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit S une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive.

1. Montrer que toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

2. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1}SP$ soit diagonale.

3. Déterminer une racine carrée de S qui soit symétrique positive. (On l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D.)

4. On veut montrer que S admet une unique racine carrée symétrique positive.
Soit R une matrice symétrique positive telle $R^2 = S$.

a. Soit λ une valeur propre de R. Montrer que λ^2 est valeur propre de S et que les sous-espaces propres associés vérifient : $\mathrm{SEP}(R,\lambda) \subset \mathrm{SEP}(S,\lambda^2)$.

On note p le nombre de valeurs propres deux à deux distinctes de R et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les p valeurs propres deux à deux distinctes de R.

b. Justifier : $$\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(R,\lambda_i) \subset \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2).$$

c. En déduire : $$n = \sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{SEP}(R,\lambda_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2)\right) \leqslant n.$$

d. Montrer que $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_p^2$ sont les seules valeurs propres de S et que
$$\forall i \in \{1,\ldots,p\},\quad \mathrm{SEP}(R,\lambda_i) = \mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2).$$

e. Montrer que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.

f. En déduire que S admet une unique racine carrée symétrique positive.