Devoir libre 11 (facultatif)

Eléments de correction

Première partie

1. a. Le calcul montre que $J^2 = 3J$ c'est-à-dire que J est annulée par le polynôme $X^2 - 3X = X(X-3)$. Dans ces conditions, 0 et 3 sont les seules valeurs propres éventuelles de J. On vérifie que 0 en est bien valeur propre car $\operatorname{rg} J = 1 < 3$, ainsi que 3 puisque $(1,1,1)$ est un vecteur propre évident associé à la valeur propre 3 (la somme des coefficients sur chaque ligne de J étant égale à 3).

b. On a $A = \frac{1}{2}J - \frac{1}{2}I_3$. Ainsi $A - \lambda I_3 = \frac{1}{2}\big(J - (2\lambda+1)I_3\big)$ n'est pas inversible si, et seulement si, $2\lambda + 1$ est valeur propre de J. Les valeurs propres de A sont donc $-\frac{1}{2}$ et 1, si bien que $\varrho(A) = 1$.

c. On justifie par une récurrence immédiate que $J^n = 3^{n-1}J$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit pour tout $n \geqslant 1$, par application de la formule du binôme dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ à I_3 et J qui commutent, puis dans $\mathbb{R}$, que :

$$A^n = \frac{1}{2^n}(J - I_3)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}J^k = \frac{1}{2^n}\Big(\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k(-1)^{n-k}J + (-1)^n I_3\Big)$$
$$= \frac{1}{2^n}\Big(\frac{2^n - (-1)^n}{3}J + (-1)^n I_3\Big) = \begin{pmatrix}\alpha_n & \beta_n & \beta_n\\ \beta_n & \alpha_n & \beta_n\\ \beta_n & \beta_n & \alpha_n\end{pmatrix}$$

où

$$\alpha_n = \frac{1}{3}\Big(1 + 2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\Big) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{1}{3}\Big(1 - \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\Big) \geqslant 0.$$

Il en ressort que

$$\forall n \geqslant 1, \quad N(A^n) = \alpha_n + 2\beta_n = 1.$$

d. Il ressort immédiatement de l'expression obtenue en **c.** que (A^n) converge vers $M = \frac{1}{3}J$. La matrice M est de rang 1 et représente un projecteur : $M^2 = \frac{1}{9}J^2 = \frac{1}{3}J = M$.

2. a. La matrice A étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $\operatorname{Sp} A = \{1, 1+\mathbf{i}, 1-\mathbf{i}\}$. Admettant trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$. Par ailleurs, on calcule sans difficulté $N(A) = 1 + \sqrt{2}$ et $\varrho(A) = \sqrt{2}$.

b. On obtient immédiatement les vecteurs $v_1 = (1,0,0)$ et $v_2 = (0,1,0)$, propres pour A respectivement associés aux valeurs propres 1 et $1+\mathbf{i}$. La résolution du système $AX = (1-\mathbf{i})X$ fait émerger le vecteur $v_3 = (0,1,-2\mathbf{i})$, propre pour A associé à la valeur propre $1-\mathbf{i}$.

Les trois vecteurs v_1, v_2, v_3 étant propres pour A, associés à des valeurs propres deux-à-deux distinctes, ils forment une famille libre de cardinal 3 en dimension 3, donc une base de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de A.

c. En notant

$$P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2\mathbf{i}\end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3), la formule de changement de base appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à A donne :

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1+\mathbf{i} & 0\\ 0 & 0 & 1-\mathbf{i}\end{pmatrix}.$$

On montre alors par récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2\mathbf{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (1+\mathbf{i})^n & 0\\ 0 & 0 & (1-\mathbf{i})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2\mathbf{i}}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\mathbf{i}}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (1+\mathbf{i})^n & \gamma_n\\ 0 & 0 & (1-\mathbf{i})^n\end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{aligned}\gamma_n &= \tfrac{1}{2\mathbf{i}}\big((1+\mathbf{i})^n - (1-\mathbf{i})^n\big) = \Im\mathrm{m}\,(1+\mathbf{i})^n\\ &= \Im\mathrm{m}\,(\sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi/4})^n = \sqrt{2}^n \sin\tfrac{n\pi}{4}\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A^n apparaissent sur la diagonale de D^n semblable à A^n, d'où l'expression de $\varrho(\mathrm{A}^n) = \sqrt{2}^n = \varrho(\mathrm{A})^n$.

d. Il vient d'après l'expression précédente de A^n :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{N}(\mathrm{A}^n) = \max\Big(1, \sqrt{2}^n, \sqrt{2}^n + \sqrt{2}^n\Big|\sin\frac{n\pi}{4}\Big|\Big) = 2^{n/2}\Big(1 + \Big|\sin\frac{n\pi}{4}\Big|\Big).$$

On a alors

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sqrt{2} \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}^n)^{1/n} = \sqrt{2}\Big(1 + \Big|\sin\frac{n\pi}{4}\Big|\Big)^{1/n} \leqslant \sqrt{2}\cdot 2^{1/n}$$

d'où, par encadrement,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{N}(\mathrm{A}^n)^{1/n} = \sqrt{2} = \varrho(\mathrm{A}).$$

Deuxième partie

3. La relation $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ s'écrit :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad \sum_{j=1}^{p} a_{k,j}x_j = \lambda x_k$$

d'où, en particulier pour $k = k_0$,

$$|\lambda x_{k_0}| = \Big|\sum_{j=1}^{p} a_{k_0,j}x_j\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{p} |a_{k_0,j}x_j| \leqslant |x_{k_0}|\sum_{j=1}^{p} |a_{k_0,j}|$$

puis, en simplifiant par $|x_{k_0}| > 0$,

$$|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{p} |a_{k_0,j}| \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}).$$

Ainsi $\mathrm{N}(\mathrm{A})$ majore le module de chaque valeur propre de A et donc le plus grand $\varrho(\mathrm{A})$ d'entre eux : $0 \leqslant \varrho(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A})$.

4. a. Il vient par récurrence immédiate $\mathrm{A}^n\mathrm{X} = \lambda^n\mathrm{X}$, ce qui montre (le vecteur X étant non nul comme vecteur propre de A) que λ^n est valeur propre de A^n, d'où l'on déduit que $|\lambda^n| \leqslant \varrho(\mathrm{A}^n)$. Cette inégalité étant valable pour toute valeur propre λ de A, et en particulier lorsque $|\lambda| = \varrho(\mathrm{A})$, il en ressort que $\varrho(\mathrm{A})^n \leqslant \varrho(\mathrm{A}^n)$.

b. Il suffit de justifier que :

$$\mathrm{X}^n - \mu = \prod_{j=0}^{n-1}(\mathrm{X} - \alpha_j).$$

C'est le cas si $\mu = 0$ en considérant que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont nuls. Si le complexe μ est non nul, il admet n racines n-ièmes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ deux-à-deux distinctes, qui sont autant de racines du polynôme $\mathrm{X}^n - \mu$. Ce dernier est donc divisible par $\prod_{j=0}^{n-1}(\mathrm{X} - \alpha_j)$. Ces deux polynômes étant par ailleurs unitaires de degré n, ils sont donc égaux, ce qui explique la factorisation précédente.

c. Si aucun des complexes $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ n'était valeur propre de A, alors toutes les matrices $\mathrm{A} - \lambda_j\mathrm{I}_p$ seraient inversibles, et il en irait de même de leur produit $\prod_{j=0}^{n-1}(\mathrm{A} - \lambda_j\mathrm{I}_p) = \mathrm{A}^n - \mu\mathrm{I}_p$, en contradiction avec le fait que μ est valeur propre de A^n. C'est donc qu'il existe $j_0 \in [\![0, n-1]\!]$ tel que α_{j_0} soit valeur propre de A.

d. Il vient $\varrho(\mathrm{A}^n) = |\mu| = |\alpha_{j_0}|^n \leqslant \varrho(\mathrm{A})^n$ car $|\alpha_{j_0}| \leqslant \varrho(\mathrm{A})$ étant donné que α_{j_0} est valeur propre de A.
Avec l'inégalité de la question **a.**, on en déduit que $\varrho(\mathrm{A}^n) = \varrho(\mathrm{A})^n$.
En appliquant les inégalités de la question **3.** à la matrice A^n, on obtient alors

$$0 \leqslant \varrho(\mathrm{A}) = \big(\varrho(\mathrm{A})^n\big)^{1/n} = \varrho(\mathrm{A}^n)^{1/n} \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}^n)^{1/n}.$$

5. En notant $\mathrm{A}^n = \big(a_{k,j}(n)\big)_{1\leqslant k,j\leqslant p} \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$, la convergence de (A^n) vers 0 signifie que

$$\forall k, j \in [\![1, p]\!], \quad \lim_{n\to\infty} a_{k,j}(n) = 0.$$

Dans ces conditions,

$$0 \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}^n) \leqslant \sum_{1\leqslant k,j\leqslant p} |a_{k,j}(n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

d'où l'on déduit par encadrement que $\mathrm{N}(\mathrm{A}^n)$ converge vers 0 lorsque $n \to \infty$. Toujours par encadrement, on déduit alors de la question **4.d.** que la suite géométrique $\big(\varrho(\mathrm{A})^n\big)$ converge également vers 0, ce qui signifie que $|\varrho(\mathrm{A})| < 1$.

6. a. La matrice A étant supposée diagonalisable, il existe $\mathrm{P} \in \mathbf{Gl}_p(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit diagonale. Si $\varrho(\mathrm{A}) < 1$, alors les coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de D i.e. les valeurs propres de A vérifient $|\lambda_j| < 1$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$. Dans ces conditions, les propriétés admises en début d'énoncé assurent que :

$$\mathrm{A}^n = (\mathrm{PDP}^{-1})^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_p^n)\mathrm{P}^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{P}0\mathrm{P}^{-1} = 0.$$

b. Avec les notations de la question **a.**, on a $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}_\varepsilon\mathrm{P} = \mathrm{D}_\varepsilon = \frac{1}{\varrho(\mathrm{A})+\varepsilon}\mathrm{D}$. Les valeurs propres de A_ε sont donc les coefficients diagonaux de D_ε : ce sont les complexes $\frac{\lambda_j}{\varrho(\mathrm{A})+\varepsilon}$, $1 \leqslant j \leqslant p$. Par suite,

$$\varrho(\mathrm{A}_\varepsilon) = \max_{1\leqslant j\leqslant p}\left|\frac{\lambda_j}{\varrho(\mathrm{A})+\varepsilon}\right| = \frac{1}{\varrho(\mathrm{A})+\varepsilon}\max_{1\leqslant j\leqslant p}|\lambda_j| = \frac{\varrho(\mathrm{A})}{\varrho(\mathrm{A})+\varepsilon} < 1.$$

La matrice A_ε étant diagonalisable comme on vient de le voir, la question **a.** assure alors que la suite $(\mathrm{A}_\varepsilon^n)$ converge vers la matrice nulle. D'après la question **5.**, cela implique la convergence de $\mathrm{N}(\mathrm{A}_\varepsilon^n)$ vers 0 lorsque $n \to \infty$. D'après la définition de la convergence, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathrm{N}(\mathrm{A}_\varepsilon^n) \leqslant 1$.

c. C'est immédiat par homogénéité de l'application N (pour tous $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{B} \in \mathbf{M}_p(\mathbb{C})$, $\mathrm{N}(\alpha\mathrm{B}) = |\alpha|\,\mathrm{N}(\mathrm{B})$) sachant que $\mathrm{A}_\varepsilon = \big(\varrho(\mathrm{A})+\varepsilon\big)\mathrm{A}$.

d. Pour $n \geqslant n_0$, il vient d'après **b.** et **c.** $\mathrm{N}(\mathrm{A}^n)^{1/n} = \big(\varrho(\mathrm{A})+\varepsilon\big)\mathrm{N}(\mathrm{A}_\varepsilon^n)^{1/n} \leqslant \varrho(\mathrm{A})+\varepsilon$.
Ainsi, d'après les questions **3.** et **4.d.**,

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \varrho(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}^n)^{1/n} \leqslant \varrho(\mathrm{A})+\varepsilon,$$

ce qui établit la convergence de la suite $\big(\mathrm{N}(\mathrm{A}^n)^{1/n}\big)$ vers $\varrho(\mathrm{A})$.

Troisième partie

7. En notant $\mathrm{A}^n = \big(a_{k,j}(n)\big)_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ et $\mathrm{B}^n = (b_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on montre par récurrence sur $n \geqslant 1$ que pour tous $k, j \in [\![1, p]\!]$, $0 \leqslant b_{k,j}(n) \leqslant a_{k,j}(n)$. C'est vrai par hypothèse au rang $n = 1$ et si le résultat est acquis à un rang $n \geqslant 1$ donné alors :

$$\forall k, j \in [\![1, p]\!], \quad 0 \leqslant b_{k,j}(n+1) = \sum_{\ell=1}^{p} b_{k,\ell}b_{\ell,j}(n) \leqslant \sum_{\ell=1}^{p} a_{k,\ell}a_{\ell,j}(n) = a_{k,j}(n+1)$$

par hypothèse de récurrence, sachant tous les coefficients positifs ou nuls, ce qui constitue le résultat au rang $n+1$.
Il en résulte immédiatement pour $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad \sum_{j=1}^{p}|b_{k,j}(n)| \leqslant \sum_{k=1}^{p} a_{k,j}(n) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}^n)$$

d'où l'on déduit que $\mathrm{N}(\mathrm{B}^n) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}^n)$.
Par suite, $\mathrm{N}(\mathrm{B}^n)^{1/n} \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}^n)^{1/n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne $\varrho(\mathrm{B}) \leqslant \varrho(\mathrm{A})$ par passage à la limite lorsque $n \to \infty$ d'après le résultat admis en fin de deuxième partie.

8. L'hypothèse s'écrit $\mathrm{AU} = s\mathrm{U}$ où $\mathrm{U} = (1, \ldots, 1)$ et implique par récurrence immédiate $\mathrm{A}^n\mathrm{U} = s^n\mathrm{U}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où l'on déduit que $\mathrm{N}(\mathrm{A}^n) = s^n$ sachant que les coefficients de A^n sont tous positifs ou nuls comme on l'a vu en **7.**. Ainsi $\mathrm{N}(\mathrm{A}^n)^{1/n} = s$ puis $\varrho(\mathrm{A}) = s$ par passage à la limite lorsque $n \to \infty$.
Remarque. On peut conclure sans utiliser le résultat admis : une fois observé que s est valeur propre de A, il vient $s \leqslant \varrho(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A})$ d'après **3.**, mais aussi $\mathrm{N}(\mathrm{A}) = s$ par hypothèse.

9. Soient $\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_p$ les lignes de A. En notant $\mathrm{A}' = (a'_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p} \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice de lignes $\mathrm{L}'_1, \ldots, \mathrm{L}'_p$ définies par $\mathrm{L}'_k = \frac{\sigma}{\sigma_k}\mathrm{L}_k$ où $\sigma_k = \sum_{j=1}^{p} a_{k,j} \geqslant \sigma$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$\forall k, j \in [\![1, p]\!], \quad 0 \leqslant a'_{k,j} = \frac{\sigma}{\sigma_k}a_{k,j} \leqslant a_{k,j}$$

car A est à coefficients positifs ou nuls, d'où $\varrho(\mathrm{A}') \leqslant \varrho(\mathrm{A})$ d'après la question **7.**. La matrice A' vérifiant les conditions de la question **8.**, on a par ailleurs $\varrho(\mathrm{A}') = \sigma$ d'où finalement $\sigma \leqslant \varrho(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A})$ d'après la question **3.**.

10. a. La matrice Δ_X est inversible car diagonale à coefficients diagonaux tous non nuls.

Quant au calcul demandé, il peut être effectué directement, ou en se souvenant que la multiplication d'une matrice A à droite (resp. à gauche) par une matrice diagonale D de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_n$ non nuls a pour effet de multiplier chaque colonne C_j de A par d_j (resp. chaque ligne L_k de A par d_k). Mais on peut aussi raisonner géométriquement : en interprétant Δ_X comme la matrice de passage de la base canonique $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ de $\mathbb{R}^p$ à la base $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ définie par $e_j = x_j \varepsilon_j$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, la matrice $B = \Delta_X^{-1} A \Delta_X = (b_{k,j})_{1 \leqslant k,j \leqslant p}$ représente l'endomorphisme ϕ_A canoniquement associé à A dans la base $\underline{e}$. Or

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad \phi_A(e_j) = x_j \phi_A(\varepsilon_j) = x_j \sum_{k=1}^{p} a_{k,j} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{p} \frac{x_j}{x_k} a_{k,j} e_k$$

d'où, par identification sur la base $\underline{e}$, le coefficient générique de B :

$$\forall k, j \in [\![1, p]\!], \quad b_{k,j} = \frac{x_j}{x_k} a_{k,j}.$$

b. C'est une application directe du résultat de la question **9.** à la matrice $\Delta_X^{-1} A \Delta_X$ vu son coefficient générique obtenu en **a.**, qui admet les mêmes valeurs propres que la matrice A à laquelle elle est semblable si bien que $\varrho(\Delta_X^{-1} A \Delta_X) = \varrho(A)$.

c. Pour $\beta \geqslant 0$ tel que $\beta X < AX$, on a :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad \beta < \frac{1}{x_k} \sum_{j=1}^{p} a_{k,j} x_j.$$

En écrivant en particulier cette inégalité pour l'entier $k \in [\![1, p]\!]$ minimisant le membre droite, on en déduit d'après **b.** que

$$\beta < \min_{1 \leqslant k \leqslant p} \frac{1}{x_k} \sum_{j=1}^{p} a_{k,j} x_j \leqslant \varrho(A).$$

Quatrième partie

On note $X = (x_1, \dots, x_p)$.

11. a. Il vient, par application du résultat de la question **9.** à la matrice strictement positive A :

$$\varrho(A) \geqslant \min_{1 \leqslant k \leqslant p} \sum_{j=1}^{p} a_{k,j} > 0.$$

b. Par inégalité triangulaire et par positivité de A, il vient :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad \left| \sum_{j=1}^{k} a_{k,j} x_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{p} a_{k,j} |x_j|,$$

ce qui traduit précisément que $|AX| \leqslant A|X|$. Sachant que X est propre pour A associé à la valeur propre λ de module $\varrho(A)$, on a par ailleurs $|AX| = |\lambda X| = |\lambda| |X| = \varrho(A) |X|$, d'où finalement $\varrho(A) |X| \leqslant A |X|$.

c. Le vecteur X étant non nul en tant que vecteur propre de A, il existe $j_0 \in [\![1, p]\!]$ tel que $x_{j_0} \neq 0$ et alors, par positivité de $|X|$ et stricte positivité de A :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad \sum_{j=1}^{p} a_{k,j} |x_j| \geqslant a_{k,j_0} |x_{j_0}| > 0,$$

ce qui montre que $Z = A|X| > 0$.

d. On a vu en **b.** que $Y \geqslant 0$ à partir de quoi on montre, comme en **c.**, que $Y \neq 0$ implique $AY > 0$ i.e. $\varrho(A) Z < AZ$.

e. Sous l'hypothèse $Y \neq 0$, on peut donc appliquer la question **10.c.** au réel positif $\beta = \varrho(A)$, ce qui conduirait à la conclusion $\varrho(A) < \varrho(A)$... C'est donc que $Y = 0$ i.e. $A|X| = \varrho(A)|X|$: comme $X \neq 0$, cela montre que $|X|$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre $\varrho(A)$.

12. a. On reprend la démonstration de l'inégalité triangulaire. On a :

$$\begin{aligned}(|z_1| + |z_2|)^2 - |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| - (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= 2|z_1 z_2| - 2\Re\mathrm{e}\,(z_1 \overline{z_2}) = 2|z_1 z_2| \big(1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)\big).\end{aligned}$$

L'égalité $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ implique donc, puisque z_1 et z_2 sont non nuls, $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$ i.e. l'égalité des deux réels θ_1 et θ_2 de l'intervalle $[0, 2\pi[$.

b. On procède par récurrence sur $p \geqslant 2$. Le cas $p = 2$ vient d'être traité dans la question **a.**. On le suppose à présent, pour $p \geqslant 3$ donné, acquis au rang $p-1$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$\Big|\sum_{j=1}^{p} z_j\Big| = \Big|\sum_{j=1}^{p-1} z_j + z_p\Big| \leqslant \Big|\sum_{j=1}^{p-1} z_j\Big| + |z_p| \leqslant \sum_{j=1}^{p-1} |z_j| + |z_p| = \sum_{j=1}^{p} |z_j|$$

et l'égalité des membres extrémaux n'est possible que si les deux inégalités sont des égalités : pour la seconde, cela implique par hypothèse de récurrence que $z_1, \ldots, z_{p-1}$ ont même argument, qui est alors aussi celui de leur somme, de ce fait non nulle. Quant à la première, cela implique alors que z_p a même argument que $z_1 + \cdots + z_{p-1}$ et donc que $z_1, \ldots, z_{p-1}$, d'où le résultat.

13. D'après la question **11.**, $\varrho(\mathrm{A})\,|\mathrm{X}| = \mathrm{A}\,|\mathrm{X}| = \mathrm{Z} > 0$ avec $\varrho(\mathrm{A}) > 0$ d'où l'on déduit que $|\mathrm{X}| > 0$.
Comme on l'a vu en **11.b.**, l'égalité $\varrho(\mathrm{A})\,|\mathrm{X}| = \mathrm{A}\,|\mathrm{X}|$ établie en **11.e.** s'écrit encore $|\mathrm{AX}| = \mathrm{A}\,|\mathrm{X}|$, c'est-à-dire

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad \Big|\sum_{j=1}^{p} a_{k,j}x_j\Big| = \sum_{j=1}^{p} |a_{k,j}x_j|$$

par positivité de A. Pour $k = 1$ par exemple, la question **12.b.** assure que les complexes $a_{1,1}x_1, \ldots, a_{1,p}x_p$, non nuls comme on vient de le voir, ont même argument. Par stricte positivité de A de nouveau, on en déduit que $x_1, \ldots, x_p$ ont même argument, d'où le résultat.

14. a. D'après les questions **11.e.** et **13.**,

$$\varrho(\mathrm{A})\,|\mathrm{X}| = \mathrm{A}\,|\mathrm{X}| = \mathrm{AX}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta} = \lambda\mathrm{X}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta} = \lambda\,|\mathrm{X}|$$

d'où l'on déduit que $\lambda = \varrho(\mathrm{A})$ sachant que $\mathrm{X} \neq 0$.

b. Sous les hypothèses de l'énoncé, le vecteur $u_1\mathrm{V} - v_1\mathrm{U}$ appartient au sous-espace propre de A pour la valeur propre $\varrho(\mathrm{A})$. Sa première coordonnée étant nulle, il ne peut s'agir que du vecteur nul d'après **13.** : $u_1\mathrm{V} - v_1\mathrm{U} = 0$, ce qui implique $u_1 = v_1 = 0$ puisque la famille (U, V) est libre, et contredit donc le résultat de la question **13.**. Il ne peut donc exister deux vecteurs linéairement indépendants dans le sous-espace propre pour la valeur propre $\varrho(\mathrm{A})$, non nul d'après **11.e.**, qui est donc de dimension 1.

15. a. Par invariance du rang, on a $\mathrm{rg}(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_p) = \mathrm{rg}\,{}^t(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_p) = \mathrm{rg}({}^t\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_p)$ pour tout complexe λ. Un complexe λ étant valeur propre de A (resp. de ${}^t\mathrm{A}$) si, et seulement si, $\mathrm{rg}(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_p) < p$ (resp. $\mathrm{rg}({}^t\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_p) < p$), les matrices A et ${}^t\mathrm{A}$ ont donc mêmes valeurs propres.

b. D'après les questions **14.a.** et **a.**, $\varrho(\mathrm{A})$ est la valeur propre de module maximal de la matrice strictement positive ${}^t\mathrm{A}$. Dans ces conditions, la question **14.b.** assure que le sous-espace propre associé est une droite, dirigée par un vecteur ayant toutes ses coordonnées strictement positives d'après **11.e.** et **13.**. Les coordonnées du vecteur Z, qui en est nécessairement un multiple non nul, sont donc toutes strictement positives ou toutes strictement négatives.

c. Le réel ${}^t\mathrm{ZU}$ ayant d'après **b.** même signe que chacune des coordonnées de Z, toutes non nulles, on a $\mathrm{Y} > 0$. Par ailleurs, Z étant valeur propre de ${}^t\mathrm{A}$ pour la valeur propre $\varrho(\mathrm{A})$, il en va de même pour Y : ${}^t\mathrm{AY} = \varrho(\mathrm{A})\mathrm{Y}$. Enfin, le calcul donne ${}^t\mathrm{YU} = \frac{1}{{}^t\mathrm{ZU}}{}^t\mathrm{ZU} = 1$.

16. a. Dans cette question, on identifie M à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ qui lui est canoniquement associé.
Il vient immédiatement $\mathrm{M}^2 = (\mathrm{U}{}^t\mathrm{Y})(\mathrm{U}{}^t\mathrm{Y}) = \mathrm{U}({}^t\mathrm{YU}){}^t\mathrm{Y} = \mathrm{U}{}^t\mathrm{Y} = \mathrm{M}$ d'après **15.c.**, ce qui montre que M est la matrice d'un projecteur.
Par ailleurs, on a $\mathrm{MX} = \mathrm{U}({}^t\mathrm{YX}) = ({}^t\mathrm{YX})\mathrm{U} \in \mathrm{Vect}\,\mathrm{U}$ pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^p$ car ${}^t\mathrm{YX} \in \mathbb{R}$ si bien que $\mathrm{Im}\,\mathrm{M} \subset \mathrm{Vect}\,\mathrm{U}$. Comme $\mathrm{M} \neq 0$ puisque $\mathrm{MU} = \mathrm{U} \neq 0$, l'image de M est donc la droite dirigée par U. Quant à son noyau, il est formé des vecteurs $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^p$ tels que $\mathrm{MX} = 0$ i.e. $({}^t\mathrm{YX})\mathrm{U} = 0$ ou encore ${}^t\mathrm{YX} = 0$ puisque ${}^t\mathrm{YX}$ est un réel et U un vecteur non nul. Il s'agit donc de l'hyperplan défini par l'équation ${}^t\mathrm{YX} = 0$ puisque $\mathrm{Y} \neq 0$, c'est-à-dire l'hyperplan normal au vecteur Y dans $\mathbb{R}^p$ euclidien canonique.

b. On note pour commencer que M (et donc $\mathrm{I}_p - \mathrm{M}$) commute avec A :

$$\mathrm{MA} = \mathrm{U}{}^t\mathrm{YA} = \mathrm{U}\,{}^t({}^t\mathrm{AY}) = \varrho(\mathrm{A})\mathrm{U}{}^t\mathrm{Y} = \mathrm{AU}{}^t\mathrm{Y} = \mathrm{AM}.$$

Par ailleurs, on a $\mathrm{A}^n\mathrm{U} = \varrho(\mathrm{A})^n\mathrm{U}$ et donc $\mathrm{A}^n\mathrm{M} = \varrho(\mathrm{A})^n\mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En remarquant que

$$\frac{1}{\varrho(A)}A - M = \frac{1}{\varrho(A)}\big(A - \varrho(A)U{}^tY\big) = \frac{1}{\varrho(A)}(A - AU{}^tY) = \frac{1}{\varrho(A)}A(I_p - M) \qquad (1)$$

où $I_p - M$ représente le projecteur sur $\operatorname{Ker} M$ parallèlement à $\operatorname{Im} M$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{\varrho(A)}A - M\Big)^n &= \Big(\frac{1}{\varrho(A)}A\Big)^n(I_p - M)^n = \Big(\frac{1}{\varrho(A)}A\Big)^n(I_p - M)\\ &= \Big(\frac{1}{\varrho(A)}A\Big)^n - \frac{1}{\varrho(A)^n}A^nM = \Big(\frac{1}{\varrho(A)^n}A\Big) - M.\end{aligned}$$

17. a. Sachant que $\mu \neq 0$ et compte-tenu de (1), on a :

$$W = \frac{1}{\mu}\big(A - \varrho(A)M\big)W = \frac{1}{\mu}A(I_p - M)W$$

d'où

$$MW = \frac{1}{\mu}AM(I_p - M)W = 0$$

sachant que A et M commutent et que $M(I_p - M) = 0$ vu que M est une matrice de projecteur. De la relation $\big(A - \varrho(A)M\big)W = \mu W$, on déduit alors que $AW = \mu W$ c'est-à-dire que $W \neq 0$ est vecteur propre de A pour la valeur propre μ. Par suite, $|\mu| \leqslant \varrho(A)$.

b. Si μ, valeur propre de A d'après **a.**, était de module égal à $\varrho(A)$, ce serait la valeur propre de module maximal de A, associée à un sous-espace propre engendré par U d'après **14.**. Le vecteur U serait donc colinéaire à $W \neq 0$ et l'on aurait

$$\mu U = \big(A - \varrho(A)M\big)U = AU - \varrho(A)U{}^tYU = \varrho(A)U - \varrho(A)U = 0$$

d'après **15.c.**, ce qui contredirait $\mu \neq 0$. L'inégalité de la question **a.** est donc stricte : $|\mu| < \varrho(A)$.

c. Puisque le spectre de $A - \varrho(A)M$ est fini, la question **b.** (dont le résultat est encore valable pour $\mu = 0$ d'après **11.a.**) met en évidence que $\varrho\big(A - \varrho(A)M\big) < \varrho(A)$ i.e., d'après l'homogénéité évidente de ϱ (pour tous $\alpha \in \mathbb{C}$ et $B \in \mathbf{M}_p(\mathbb{C})$, $\varrho(\alpha B) = |\alpha|\,\varrho(B)$),

$$\varrho\Big(\frac{1}{\varrho(A)}A - M\Big) < 1.$$

D'après le résultat admis en fin de deuxième partie et la question **16.b.**, il en ressort que

$$\Big(\frac{1}{\varrho(A)}A - M\Big)^n = \Big(\frac{1}{\varrho(A)}A\Big)^n - M \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

i.e. que

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{\varrho(A)}A\Big)^n = M.$$

Cinquième partie

18. a. Vu l'expression des coordonnées d'un vecteur en base orthonormale, on a $s_1 = {}^tV_0 e_1 \neq 0$ car $V_0 > 0$ par hypothèse et $|e_1| > 0$ d'après **11.e.** et **13.** car e_1 dirige le sous-espace propre de A pour la valeur propre de module maximal.

b. À partir de la décomposition de V_0 sur la base $(e_1, \ldots, e_p)$, on obtient sans difficulté

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = A^nV_0 = \sum_{k=1}^{p} s_k\lambda_k^n e_k. \qquad (2)$$

Vu l'expression de la norme en base orthonormale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|V_n\|^2 = \sum_{k=1}^{p} s_k^2\lambda_k^{2n}$$

où les termes d'indice $k \geqslant 2$ sont négligeables devant celui d'incice $k = 1$ car $s_1 \neq 0$ d'après **a.** et $|\lambda_1| > |\lambda_k|$ pour tout $k \geqslant 2$. Ainsi $\|V_n\|^2 \sim s_1^2\lambda_1^{2n}$ lorsque $n \to \infty$, d'où

$$\frac{\|V_{n+1}\|^2}{\|V_n\|^2} \sim \frac{s_1^2\lambda_1^{2n+2}}{s_1^2\lambda_1^{2n}} = \lambda_1^2 \to \lambda_1^2, \quad n \to \infty$$

puis
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|V_{n+1}\|}{\|V_n\|} = |\lambda_1| = \varrho(A) = \lambda_1$$
d'après **14.a.**.

c. D'après (2),
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{V_n}{\|V_n\|} - \frac{s_1}{|s_1|}e_1 = \left(\frac{s_1\lambda_1^n}{\|V_n\|} - \frac{s_1}{|s_1|}\right)e_1 + \sum_{k=2}^{p} \frac{s_k\lambda_k^n}{\|V_n\|}e_k$$
d'où
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\|\frac{V_n}{\|V_n\|} - \frac{s_1}{|s_1|}e_1\right\|^2 = \left(\frac{s_1\lambda_1^n}{\|V_n\|} - \frac{s_1}{|s_1|}\right)^2 + \sum_{k=2}^{p} \frac{s_k^2\lambda_k^{2n}}{\|V_n\|^2}.$$
D'après l'équivalent $\|V_n\| \sim |s_1|\,\lambda_1^n$ lorsque $n \to \infty$ obtenu en **b.**, tous les termes de la somme ci-dessus convergent vers 0 d'où finalement
$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{\|V_n\|} = \frac{s_1}{|s_1|}e_1 = \begin{cases} e_1 & \text{si } s_1 > 0 \\ -e_1 & \text{si } s_1 < 0 \end{cases}.$$

19. Le code ci-dessous convient :

Listing 1 : Calcul approché de la valeur propre maximale et d'un vecteur propre associé

```
function [V,lambda]=elements_propres(A,V0,n)
  V=V0;
  for k=1:n
    V=A*V;
  end
  W=A*V;
  lambda=sqrt((W'*W)/(V'*V));
  V=V/sqrt(V'*V);
endfunction
```