Devoir libre 10

Eléments de correction

Exercice

1. a. La variable $-\mathrm{Y}$ étant définie par transformation affine d'une variable suivant une loi uniforme sur $[0,1]$, elle suit une loi uniforme sur $[-1,0]$ d'après le cours (la propriété a été démontrée en cours dans le cas général et traitée en détail en TD dans l'exercice 11, question **2.a.** de la feuille sur les variables à densité).

Les variables X et $-\mathrm{Y}$ ont donc respectivement pour densités les fonctions

$$f_{\mathrm{X}} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f_{-\mathrm{Y}} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Celles-ci étant bornées et les variables X et $-\mathrm{Y}$ indépendantes (car X et Y le sont), leur somme $\mathrm{X}-\mathrm{Y}$ est à densité donnée par le produit de convolution

$$f_{\mathrm{X}} \star f_{-\mathrm{Y}} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{X}}(t) f_{-\mathrm{Y}}(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour mener ce calcul, on remarque que $f_{\mathrm{X}}(t)f_{-\mathrm{Y}}(x-t) \neq 0$ équivaut à $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $-1 \leqslant x-t \leqslant 0$ c'est-à-dire à $t \in [0,1] \cap [x, x+1]$. On est donc conduit à distinguer trois cas (faire un dessin pour comprendre la superposition des segments $[0,1]$ et $[x,x+1]$) pour le calcul de l'intégrale $f_{\mathrm{X}} \star f_{-\mathrm{Y}}(x)$:

- si $x < -1$ ou $x > 1$ alors $[0,1] \cap [x,x+1] = \emptyset$ donc $f_{\mathrm{X}} \star f_{-\mathrm{Y}}(x) = 0$;
- si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, alors $[0,1] \cap [x,x+1] = [0,x+1]$ et donc
$$f_{\mathrm{X}} \star f_{-\mathrm{Y}}(x) = \int_0^{x+1} \mathrm{d}t = x+1\,;$$
- si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $[0,1] \cap [x,x+1] = [x,1]$ et donc
$$f_{\mathrm{X}} \star f_{-\mathrm{Y}}(x) = \int_x^1 \mathrm{d}t = 1-x.$$

En conclusion, la variable aléatoire $\mathrm{X}-\mathrm{Y}$ est à densité donnée par :

$$f_{\mathrm{X}-\mathrm{Y}} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

b. On détermine la fonction de répartition de la variable U. Celle-ci étant à valeurs positives, on a tout d'abord $\mathbb{P}(\mathrm{U} \leqslant u) = 0$ si $u < 0$. Puis, pour $u \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{U} \leqslant u) = \mathbb{P}(|\mathrm{X}-\mathrm{Y}| \leqslant u) = \mathbb{P}(-u \leqslant \mathrm{X}-\mathrm{Y} \leqslant u) = \int_{-u}^{u} f_{\mathrm{X}-\mathrm{Y}}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

On est ici encore amené à distinguer deux cas :

- si $0 \leqslant u \leqslant 1$, alors $[-u,u] \subset [-1,1]$ donc :
$$\mathbb{P}(\mathrm{U} \leqslant u) = \int_{-u}^{0} (1+t)\,\mathrm{d}t + \int_0^u (1-t)\,\mathrm{d}t = 2u - u^2\,;$$
- si $u > 1$,
$$\mathbb{P}(\mathrm{U} \leqslant u) = \int_{-1}^{0} (1+t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Ainsi U admet pour fonction de répartition

$$\mathrm{F}_{\mathrm{U}} : u \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ 2u-u^2 & \text{si } 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } u > 1 \end{cases}.$$

Celle-ci est continue sur $\mathbb{R}$ (même en 0 et 1) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. La variable aléatoire U est donc à densité donnée par :

$$f_U : u \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 2(1-u) & \text{si } 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. À partir du moment où la première personne parmi A et B sort, la seconde reste au guichet un temps égal à $|X-Y|$. L'événement E : « C est la dernière personne à sortir » est donc réalisé si, et seulement si, $|X-Y| \leqslant Z$. On en déduit bien que $E = [U - Z \leqslant 0]$.
Pour déterminer la probabilité de cet événement, on cherche la loi de la variable aléatoire $U - Z$. Tout d'abord, les variables Y et Z étant de mêmes lois, la loi de $-Z$ est la même que celle de $-Y$ déterminée en **1.a.**. Par ailleurs, les variables X, Y et Z étant mutuellement indépendantes par hypothèse, les variables $U = \varphi(X,Y)$ et $-Z = \psi(Z)$ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions. On obtient alors, en raisonnant comme en **1.a.** (les supports des densités étant les mêmes), que la variable $U-Z$ est à densité donnée par $f_{U-Z} = f_U \star f_{-Z}$ avec (seule l'expression de cette densité sur $\mathbb{R}_-$ est utile pour la suite) :

- ➢ si $x < -1$, alors $f_{U-Z}(x) = 0$;
- ➢ si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, alors
$$f_{U-Z}(x) = \int_{-1}^{x} (2-2t)\,\mathrm{d}t = 1 - x^2.$$

D'où la probabilité de l'événement E :

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(U - Z \leqslant 0) = \int_{-\infty}^{0} f_{U-Z}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} (1-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}.$$

3. Les variables X et Y étant indépendantes et de même loi on a, pour tout $v \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V \leqslant v) &= 1 - \mathbb{P}(\min(X,Y) > v) = 1 - \mathbb{P}(X > v, Y > v) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X > v)\,\mathbb{P}(Y > v) = 1 - \big(1 - F_X(v)\big)^2.\end{aligned}$$

Ainsi la variable V admet pour fonction de répartition

$$F_V : v \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } v < 0 \\ 2v - v^2 & \text{si } 0 \leqslant v \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } v > 1 \end{cases}.$$

On constate que U et V ont des fonctions de répartition identitiques. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, on en déduit que U et V ont même loi.

4. a. Le temps passé par C à la poste est $T = V + Z$. Par un argument similaire à celui utilisé en **2.**, on justifie que T est une variable à densité donnée par

$$f_T = f_V \star f_Z : t \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(v) f_Z(t-v)\,\mathrm{d}v$$

où $f_V = f_U$ puisque U et V suivent la même loi d'après **3.**. Pour que $f_V(v)f_Z(t-v) \neq 0$, il faut que $0 \leqslant v \leqslant 1$ et $0 \leqslant t - v \leqslant 1$ c'est-à-dire que $v \in [0,1] \cap [t-1,t]$, ce qui conduit à distinguer trois cas :

- ➢ si $t < 0$ ou $t > 2$, alors $[0,1] \cap [t-1,t] = \emptyset$ et $f_T(t) = 0$;
- ➢ si $0 \leqslant t \leqslant 1$, alors $[0,1] \cap [t-1,t] = [0,t]$ et
$$f_T(t) = \int_0^t 2(1-v)\,\mathrm{d}v = 2t - t^2\,;$$
- ➢ si $1 \leqslant t \leqslant 2$, alors $[0,1] \cap [t-1,t] = [t-1,1]$ et
$$f_T(t) = \int_{t-1}^{1} 2(1-v)\,\mathrm{d}v = t^2 - 4t + 4.$$

En conclusion, T a pour densité la fonction

$$f_T : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 2t - t^2 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ t^2 - 4t + 4 & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

b. Le temps moyen passé par C à la poste est donné par l'espérance de T, qui existe puisque T est presque sûrement bornée (à valeurs dans $[0,2]$). Le calcul donne :

$$\mathbb{E}(\mathrm{T}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{\mathrm{T}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t(2t-t^2)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 t(t^2-4t+4)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{6}.$$

Problème

Première partie

1. a. Le calcul donne $\mathrm{J}^2 = n\mathrm{J}$, si bien que le polynôme $\mathrm{X}^2 - n\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-n)$ annule J. Les racines 0 et n de ce dernier sont donc les seules valeurs propres éventuelles de la matrice J.
Partant de $\operatorname{rg}\mathrm{J} = 1 < n$, on met par ailleurs en évidence que 0 est bien valeur propre de J. Enfin, observant que sur chaque ligne de J, la somme des coefficients est égale à n, on a $\mathrm{J}\mathbb{1} = n\mathbb{1}$ où $\mathbb{1} = \mathbb{1}_n = {}^t\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de sorte que n est aussi valeur propre de J.
En conclusion, les valeurs propres de la matrice J sont 0 et n.

b. Le sous-espace propre $\mathrm{E}_0(\mathrm{J})$ a pour équation

$$x_1 + \cdots + x_n = 0 \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - \cdots - x_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=2}^{n} x_i(\mathrm{E}_i - \mathrm{E}_1),$$

où $(\mathrm{E}_1,\ldots,\mathrm{E}_n)$ désigne la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les vecteurs $\mathrm{V}_2 = \mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{V}_n = \mathrm{E}_n - \mathrm{E}_1$, linéairement indépendants, en forment ainsi une famille génératrice et donc une base.
Le vecteur $\mathrm{V}_1 = \mathbb{1}$ ne vérifiant pas l'équation précédente, la famille $(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \ldots, \mathrm{V}_n)$ est libre ; formée de n vecteurs, c'est donc une base de l'espace $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension n.
En notant

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -{}^t\mathbb{1}_{n-1} \\ \mathbb{1}_{n-1} & \mathrm{I}_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$$

la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $(\mathrm{V}_1,\ldots,\mathrm{V}_n)$, automatiquement inversible, la formule de changement de base appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à J garantit que

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{J}\mathrm{P} = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{D}.$$

2. a. Il ressort de la définition que $\mathrm{M}_a = a\mathrm{J} + (1-a)\mathrm{I}_n$ si bien que, d'après la question **1.b.**,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}_a\mathrm{P} &= a\mathrm{P}^{-1}\mathrm{J}\mathrm{P} + (1-a)\mathrm{P}^{-1}\mathrm{I}_n\mathrm{P} = a\mathrm{D} + (1-a)\mathrm{I}_n \\ &= \begin{pmatrix} 1+(n-1)a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1-a \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La matrice M_a admet donc les mêmes valeurs propres que la matrice diagonale précédente, à laquelle elle est semblable : $1+(n-1)a$ et $1-a$.

b. La matrice M_a est inversible si, et seulement si, 0 n'en est pas valeur propre. D'après la question **a.**, cela équivaut à $a \notin \left\{1, -\frac{1}{n-1}\right\}$.

Deuxième partie

1. a. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, il vient :

$$0 = \left\langle u_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle = \lambda_i + \alpha \sum_{1 \leqslant j \neq i \leqslant n} \lambda_j$$

car u_i est unitaire et $\langle u_i, u_j \rangle = \alpha$ pour $j \neq i$. Or le membre de droite est égal au coefficient situé sur la i-ième ligne de la matrice colonne $M_\alpha \Lambda$, d'où le résultat : $M_\alpha \Lambda = 0$.

b. Si $\alpha \notin \left\{1, -\frac{1}{n-1}\right\}$, la matrice M_α est inversible d'après **I.2.b.** si bien, d'après **a.**, que $\Lambda = 0$. La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est donc libre dans $\mathbb{R}^3$, d'où l'on déduit que $n \leqslant 3$.

2. a. Pour $i \neq j$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs unitaires u_i et u_j s'écrit $|\langle u_i, u_j \rangle| \leqslant \|u_i\| \, \|u_j\|$, c'est-à-dire $|\alpha| \leqslant 1$. Puisque $\alpha = 1$ par hypothèse, l'égalité est donc réalisée, ce qui signifie que la famille (u_i, u_j) est liée.

b. Si $n > 1$, alors la question **a.** assure l'existence d'un réel λ tel que $u_2 = \lambda u_1$ car $u_1 \neq 0$. Mais alors $1 = \alpha = \langle u_1, u_2 \rangle = \lambda \|u_1\|^2 = \lambda$, ce qui conduirait à $u_1 = u_2$, en contradiction avec l'hypothèse. C'est donc que $n = 1$.

3. a. Sous l'hypothèse $n = 4$, on a $\alpha \in \left\{1, -\frac{1}{3}\right\}$ d'après la question **1.b.** et $\alpha \neq 1$ d'après la question **2.b.**. On a donc nécessairement $\alpha = -\frac{1}{3}$.

b. La famille (u_1, u_2, u_3) est formée de trois vecteurs unitaires deux-à-deux distincts tels que $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = \alpha$ par hypothèse. Puisque $\alpha \notin \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$ d'après **a.**, elle est donc libre d'après la question **1.a.**. Formée de $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

c. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les coordonnées de u_4 dans la base (u_1, u_2, u_3) : $u_4 = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j u_j$. En écrivant les conditions $\langle u_i, u_4 \rangle = -\frac{1}{3}$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on obtient le système

$$\begin{cases} -3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 1 \end{cases},$$

qui conduit aux valeurs de $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Troisième partie

1. Pour $\alpha = 0$, la condition signifie que la famille est orthonormale. La base canonique de $\mathbb{R}^3$ convient donc.

2. a. On vérifie par le calcul que $\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 1$ ainsi que $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = -\frac{1}{2}$.

b. Sachant e_3 orthogonal à e_1, e_2 et donc à v_1, v_2, v_3, on a :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \langle e_3, \lambda v_i + \mu e_3 \rangle = \lambda \langle e_3, v_i \rangle + \mu \|e_3\|^2 = \mu.$$

Pour que la famille soit solution du problème, il est donc nécessaire que $\mu = \alpha = -\frac{1}{3}$ d'après **II.3.a.**. Par ailleurs, pour $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$,

$$\langle \lambda v_i + \mu e_3, \lambda v_j + \mu e_3 \rangle = \lambda^2 \langle v_i, v_j \rangle + \lambda\mu\big(\langle v_i, e_3 \rangle + \langle e_3, v_j \rangle\big) + \mu^2 \|e_3\|^2 = -\frac{\lambda^2}{2} + \mu^2$$

d'après **a.** et sachant toujours e_3 orthogonal à v_1, v_2, v_3. Cela conduit à $-\frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$ et donc aux deux seules valeurs possibles de $\lambda = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

Réciproquement, chacun des deux couples (λ, μ) correspondants conduit à une famille solution du problème : les calculs ci-dessus assurent que les produits scalaires de deux vecteurs distincts de la famille sont tous égaux à $-\frac{1}{3}$, et on vérifie qu'ils sont unitaires en utilisant une fois de plus l'orthogonalité de e_3 avec v_1, v_2 et v_3 : d'après le théorème de Pythagore,

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \|\lambda v_i + \mu e_3\|^2 = \lambda^2 \|v_i\|^2 + \mu^2 \|e_3\|^2 = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1.$$