Chapitre 6 :

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

1 Rappels sur les intégrales définies **2**
1.1 Définition de l'intégrale . . . 2
1.2 Propriétés de l'intégrale . . . 2
1.3 Primitives & calcul intégral . . . 3

2 Notion d'intégrale généralisée **4**
2.1 Sur un intervalle semi-ouvert . . . 4
2.2 Exemples de référence : les intégrales de Riemann . . . 6
2.3 Sur un intervalle ouvert . . . 6
2.4 Sur un intervalle privé d'un nombre fini de points . . . 7
2.5 Théorèmes opératoires . . . 8

3 Propriétés des intégrales généralisées convergentes **8**
3.1 Linéarité . . . 8
3.2 Relation de Chasles . . . 8
3.3 Positivité et croissance . . . 8

4 Théorème de comparaison pour les fonctions positives **9**
4.1 Lemme fondamental et théorème de comparaison . . . 9
4.2 Déclinaisons du théorème de comparaison . . . 9
4.3 Comparaison aux intégrales de Riemann (HP) . . . 10

5 Intégrales absolument convergentes **10**

6 Outils de calcul intégral **11**
6.1 Changement de variable . . . 11
6.2 Intégration par parties . . . 12

7 Comparaison série-intégrale **12**

8 Intégrales classiques **12**
8.1 Intégrale de Gauss . . . 12
8.2 Fonction Gamma . . . 12

Dans ce chapitre, on cherche à étendre la notion d'intégrale des fonctions continues sur un segment au cas de certaines fonctions continues sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

1. Rappels sur les intégrales définies

Dans tout ce paragraphe, $a < b$ désignent deux réels.

Définition 1.1 *Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite* ***continue par morceaux*** *s'il existe des réels $c_0 = a < c_1 < \cdots < c_p = b$ tels que :*

- *la fonction f est continue sur chaque intervalle ouvert $]c_{j-1}, c_j[$, $1 \leqslant j \leqslant p$;*
- *la fonction f admet des limites finies à droite en c_0, à gauche et à droite en $c_1, \ldots, c_{p-1}$ et à gauche en c_p.*

1.1 Définition de l'intégrale

L'intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ a été définie en première année. Bien que la construction rigoureuse soit hors-programme, on peut retenir l'idée générale suivante. On commence par définir l'intégrale d'une fonction en escalier puis on montre qu'en approchant f de plus en plus finement par des fonctions g en escalier, l'intégrale $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ se stabilise autour d'une valeur que l'on prend comme définition de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

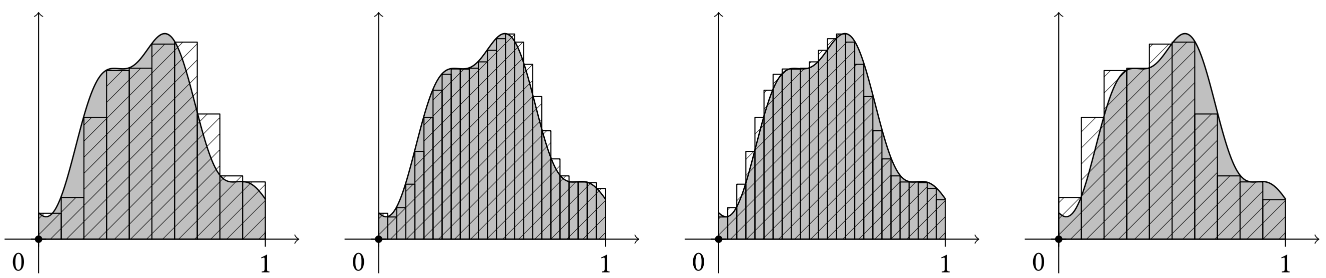
Il en découle le résultat important suivant, à connaître car utile en pratique :

Théorème 1.2 (Sommes de Riemann ou méthode des rectangles) *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On a :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big).$$

En particulier, si f est continue sur $[0, 1]$, on a :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big).$$



rectangles gauche $n = 10$ | rectangles gauche $n = 25$ | rectangles droite $n = 25$ | rectangles droite $n = 10$

1.2 Propriétés de l'intégrale

Proposition 1.3 (Additivité par rapport aux bornes – Relation de Chasles) *Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle* I.
On a :

$$\forall a, b, c \in \mathrm{I}, \quad \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 1.4 La proposition précédente vaut quelque soit la façon dont sont ordonnés a, b et c.

Proposition 1.5 (Linéarité de l'intégrale) *Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux.*
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) + g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 1.6 (Positivité de l'intégrale) *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.*
Si f est positive sur $[a, b]$ (i.e. $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a, b]$), alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Remarque 1.7 Attention, dans le résultat précédent et dans les deux suivants, il est essentiel d'avoir $a < b$!

Corollaire 1.8 (Croissance de l'intégrale) *Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux.*
Si $f \leqslant g$ sur $[a, b]$ (i.e. $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$), alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Corollaire 1.9 (Inégalité triangulaire intégrale) *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.*
On a :

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 1.10 *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.*
Si f est continue *et* positive*, alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\forall x \in [a, b], f(x) = 0\Big).$$

1.3 Primitives & calcul intégral

Définition 1.11 *Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.*
*On appelle **primitive** de f toute fonction $\mathrm{F} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et dont la dérivée est f : $\mathrm{F}' = f$.*

Le *théorème fondamental du calcul différentiel et intégral* fait le lien entre les notions d'intégration, de primitivation et de dérivation. Il se présente sous les trois formes suivantes.

Théorème 1.12 *Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction* continue *et $a \in \mathrm{I}$.*
La fonction f admet une unique primitive F qui s'annule en a ; elle est donnée par la formule :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Les autres primitives de f diffèrent de F par une constante : il s'agit des fonctions de la forme $\mathrm{G} = \mathrm{F} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.13 *Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction* continue *et F une primitive de f (pas nécessairement celle de l'énoncé précédent).*
On a :

$$\forall a, b \in \mathrm{I}, \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a),$$

le second membre étant traditionnellement désigné par le crochet $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \big[\mathrm{F}(t)\big]_{t=a}^{b}$.

Théorème 1.14 *Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction* de classe $\mathscr{C}^1$.
On a :

$$\forall a, x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit les deux résultats suivants, qui constituent deux outils très importants pour le calcul intégral.

Théorème 1.15 (Intégration par parties) *Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.*
On a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_{t=a}^{b} - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 1.16 (Changement de variable) *Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans $[a, b]$.*
On a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

2. Notion d'intégrale généralisée

2.1 Sur un intervalle semi-ouvert

Étant donnés $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, on considère l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$ et une fonction $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue.
On dispose alors de la fonction

$$\mathrm{F} : x \in [a, b[\longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

qui est *l'une* des primitives de f.

Définition 2.1 *(i) On dit que l'**intégrale généralisée** (ou éventuellement **impropre**)*

$$\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.1}$$

*est **convergente** si $\mathrm{F}(x)$ admet une limite finie lorsque $x \to b$, $x < b$. Dans ce cas, on note :*

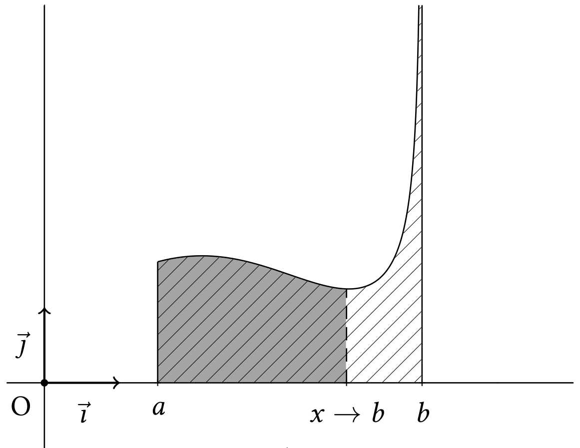
$$\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \mathrm{F}(x) = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(ii) Dans le cas contraire, l'intégrale généralisée (2.1) *est dite **divergente** (la notation* (2.1) *ne désigne alors qu'un objet abstrait qui n'a pas de valeur numérique).*

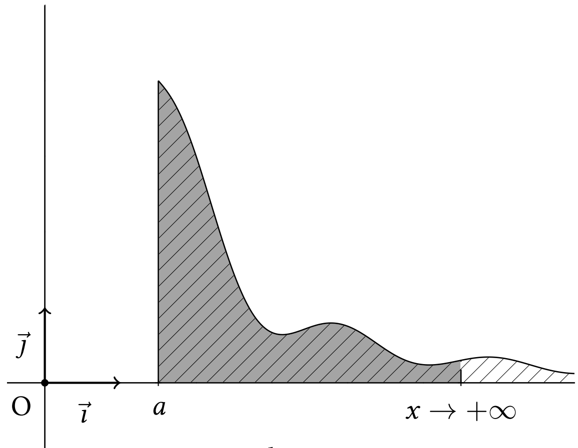
(iii) Le caractère convergent ou divergent de l'intégrale généralisée (2.1) *constitue sa **nature**.*

Remarques 2.2 • On notera l'analogie avec les séries : $\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ représente une intégrale partielle pour l'intégrale généralisée $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$.

- Dans le cas d'une fonction f positive, on dispose de l'interprétation suivante en termes d'aire (cf. figure page suivante). On cherche à définir l'aire de la partie $\mathscr{A}$ du plan (hachurée sur le dessin ci-dessous) limitée par l'axe des abscsisses, la courbe représentative de f, la droite d'équation $t = a$ et, si $b \in \mathbb{R}$, celle d'équation $t = b$. Pour cela, on considère la partie du plan (représentée en gris) limitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f, et les droites d'équations $t = a$ et $t = x$; si son aire, égale à $\mathrm{F}(x)$, converge vers ℓ lorsque $x \to b$, on décide de poser $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t = \ell$ et d'attribuer cette valeur à l'aire de $\mathscr{A}$, alors que dans le cas contraire, on ne définit pas $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- On notera que la définition générale précédente englobe les cas $b \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$, autrement dit les cas d'un intervalle d'intégration borné et d'un intervalle d'intégration non borné. Attention à bien repérer, dans la suite, les résultats spécifiques à l'un des deux cas.
- La flèche devant b dans la notation (2.1) indique la borne de généralisation. C'est une notation utile pour développer le cours mais qui sera rapidement délaissée en pratique au profit de la notation plus classique $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.



Cas $b \in \mathbb{R}$



Cas $b = +\infty$

Exemple 2.3 L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 0$.

Exemple 2.4 Nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t\,\mathrm{d}t$.

Remarque 2.5 On définirait de même la nature et, le cas échéant, la valeur de l'intégrale généralisée

$$\int_{\to a}^{b} g(t)\,\mathrm{d}t$$

d'une fonction g continue sur un intervalle $]a, b]$ avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, au moyen de la fonction

$$\mathrm{G} : x \in \mathrm{I} \longmapsto \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Autant dire dès maintenant que tous les résultats démontrés dans ce chapitre pour des intégrales généralisées du type $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ pourront être transposés, à de légères modifications près, aux intégrales généralisées du type $\int_{\to a}^{b} g(t)\,\mathrm{d}t$, sans que ce ne soit fait explicitement dans ce cours.

Exemple 2.6 L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{1} \ln t\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Le résultat suivant assure la cohérence de la définition 2.1 avec la notion d'intégrale sur un segment :

PROPOSITION 2.7 *Si* $\boxed{b \text{ est réel}}$ *et si* $\widetilde{f} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continue, alors la restriction* $f = \widetilde{f}|_{[a,b[}$ *est continue sur* $[a, b[$ *et l'intégrale généralisée* $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente, égale à* $\int_a^b \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$.

COROLLAIRE 2.8 *Si* $\boxed{b \text{ est réel}}$ *et si* $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue et admet une limite finie à gauche en b, alors l'intégrale généralisée* $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente.*

Remarque 2.9 Les intégrales généralisées qui satisfont les hypothèses du corollaire précédent sont parfois dites « trivialement convergentes » ou « faussement généralisées » : en effet, la fonction f peut alors être prolongée par continuité au segment $[a, b]$, et son intégrale sur cet intervalle relève alors du cas classique des intégrales sur un segment.
Il est évidemment essentiel que l'intervalle d'intégration soit borné, comme le montre l'exemple de la fonction constante égale à 1 sur $[0, +\infty[$.

Exemple 2.10 Nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1 - \cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Proposition 2.11 *Pour $c \in [a,b[$ donné, les intégrales $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et, si elles convergent, on a :*

$$\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 2.12 On tire de ce résultat un principe important, à rapprocher d'un principe similaire pour les séries : si f est continue sur $[a,b[$, la nature de l'intégrale généralisée $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend que du comportement local de f au voisinage de b.

Définition 2.13 *On suppose que l'intégrale généralisée $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.*
On appelle (fontion) ***reste*** *de l'intégrale généralisée convergente $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ l'application*

$$\mathrm{R} : x \in [a,b[\longmapsto \int_x^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 2.14 *Si l'intégrale généralisée $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors sa fonction reste a pour limite 0 à gauche au point b :*

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_x^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On note pour finir que l'étude de la nature d'une intégrale ainsi que son calcul peuvent être effectués au moyen d'une primitive quelconque de f (pas nécessairement celle qui s'annule en a comme dans la définition 2.1) :

Proposition 2.15 *Soit F une primitive de f sur $[a,b[$.*
L'intégrale généralisée $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, la fonction F admet une limite finie (à gauche) en b, et dans ce cas :

$$\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a).$$

On note encore $\big[\mathrm{F}(t)\big]_{t=a}^{t\to b}$ le second membre.

2.2 Exemples de référence : les intégrales de Riemann

Proposition 2.16 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale généralisée de Riemann $\displaystyle\int_1^{\to+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.*

Proposition 2.17 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale généralisée de Riemann $\displaystyle\int_{\to 0}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$.*

Remarque 2.18 Plus généralement, pour $a < b$ réels, les intégrales généralisées

$$\int_{\to a}^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha} \qquad \text{et} \qquad \int_a^{\to b} \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$$

convergent si, et seulement si, $\alpha < 1$.

2.3 Sur un intervalle ouvert

Soient a et b deux éléments distincts de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]a,b[$.

Définition 2.19 *On dit que l'intégrale généralisée*

$$\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.2}$$

*est **convergente** s'il existe $c \in \,]a, b[$ tel que les intégrales généralisées $\int_{\to a}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{c}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, et on pose alors :*

$$\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\to a}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée (2.2) *est **divergente**.*

Remarques 2.20
- On vérifie que la définition précédente fait sens, i.e. qu'elle ne dépend pas du choix de $c \in \,]a, b[$.
- On vérifie, comme dans la proposition 2.7, que pour une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ ($a < b$ réels), les intégrales de f sur les intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ convergent et sont égales, ce qui autorise à les désigner toutes par le symbole $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- En pratique, pour étudier la nature d'une intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ($a < b$ éléments de $\overline{\mathbb{R}}$), la première chose à faire est *invariablement* de préciser l'intervalle I de continuité de f : $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$. Les bornes de I qui ne lui appartiennent pas sont appelées **bornes de généralisation** de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Il convient d'identifier ces bornes dès le départ puisque l'étude se poursuit au voisinage de chacune d'elles :
  - ➢ aucune étude supplémentaire si f est continue sur le segment $[a, b]$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), on dira par extension que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, même si elle n'est pas généralisée ;
  - ➢ une étude particulière en a (resp. en b) si f est continue sur l'intervalle semi-ouvert $]a, b]$, $b \in \mathbb{R}$ (resp. $[a, b[$, $a \in \mathbb{R}$)
  - ➢ des études particulières en a et en b si f est seulement continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Exemples 2.21 Nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin t\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 2.22 On notera au vu de l'étude de la seconde intégrale ci-dessus l'importance de dissocier l'étude des deux bornes de généralisation.

Proposition 2.23 *Soit* F *une primitive de f sur l'intervalle ouvert* $]a, b[$.
L'intégrale généralisée $\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, F *admet des limites finies (à droite) en a et (à gauche) en b, et dans ce cas :*

$$\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \mathrm{F}(x) - \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \mathrm{F}(x).$$

On note encore $\big[\mathrm{F}(t)\big]_{t \to a}^{t \to b}$ le second membre.

Exemple 2.24 Convergence et valeur de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2}$.

2.4 Sur un intervalle privé d'un nombre fini de points

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I d'extrémités $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$, sauf peut-être en un nombre fini de points $c_1 < \cdots < c_p$ (où elle n'est peut-être même pas définie). On note $c_0 = a$ et $c_{p+1} = b$.

Définition 2.25 *On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **convergente** si chaque intégrale généralisée $\int_{c_j}^{c_{j+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$, $0 \leqslant j \leqslant p$, est convergente.*

Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{p} \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est dite* ***divergente****.*

Exemple 2.26 L'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment est convergente.

2.5 Théorèmes opératoires

Dans toute cette section, f et g désignent deux fonctions continues sur un intervalle I d'extrémités $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$, sauf peut-être en un nombre fini de points de $]a, b[$.

PROPOSITION 2.27 *(i) Si les intégrales* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *sont convergentes, alors l'intégrale* $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente.*
(ii) Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente, alors l'intégrale* $\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION 2.28 *Si* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente et* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *divergente, alors l'intégrale* $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$ *est divergente.*

Remarque 2.29 En revanche, si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont toutes deux divergentes, l'intégrale $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$ peut être convergente ou divergente.

3. Propriétés des intégrales généralisées convergentes

Dans tout ce paragraphe, f et g désignent deux fonctions continues sur un intervalle I d'extrémités $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$, sauf peut-être en un nombre fini de points de $]a, b[$.

3.1 Linéarité

PROPOSITION 3.1 *Si les intégrales* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *convergent alors, pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, *l'intégrale* $\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t$ *converge avec :*

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 3.2 Ainsi les fonctions continues sur I dont l'intégrale est convergente forment un espace vectoriel E pour les lois usuelles et l'application $f \longmapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur cet espace, i.e. une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

3.2 Relation de Chasles

PROPOSITION 3.3 *Soit* $c \in\,]a, b[$.
Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, alors les intégrales* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *convergent et l'on a :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3.3 Positivité et croissance

PROPOSITION 3.4 *On suppose que les intégrales* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *sont convergentes.*

(i) Si $f \geqslant 0$ (i.e. $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$), alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Lorsque f est de plus continue *sur son domaine de définition, on a égalité dans l'inégalité précédente si, et seulement si, $f = 0$ (i.e. $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$).*

(ii) Si $f \leqslant g$ (i.e. $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$), alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Lorsque f et g sont de plus continues *sur leur domaine de définition, on a égalité dans l'inégalité précédente si, et seulement si, $f = g$ (i.e. $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$).*

4. Théorème de comparaison pour les fonctions positives

On développe dans ce paragraphe des techniques pour déterminer la nature d'une intégrale généralisée dans le cas d'une fonction positive. Comme on l'a vu précédemment, l'étude de la nature d'une intégrale généralisée se ramène à celle d'une ou plusieurs intégrales généralisées sur un intervalle semi-ouvert. On traitera donc seulement le cas des intégrales présentant une unique borne de généralisation.

Dans tout le paragraphe, f et g désignent deux fonctions continues et *positives* sur un même intervalle semi-ouvert I d'extrémités $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$. Les résultats seront par défaut énoncés dans le cas $\mathrm{I} = [a, b[$, parfois aussi dans le cas $\mathrm{I} =]a, b]$ lorsque l'énoncé est différent. Pour différencier les deux cas, on notera les intégrales $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ dans le premier cas et $\int_{\to a}^{b} g(t)\,\mathrm{d}t$ dans le second.

Les résultats sont énoncés pour des fonctions positives mais restent valables pour les fonctions qui gardent un signe constant au voisinage de la borne de généralisation (à quelques modifications près pour ce qui concerne le lemme 4.1).

4.1 Lemme fondamental et théorème de comparaison

Lemme 4.1 *On suppose la fonction f positive sur l'intervalle $[a, b[$ (resp. g positive sur $]a, b]$).*

(i) L'intégrale $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, la fonction $\mathrm{F} : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

(ii) L'intégrale $\int_{\to a}^{b} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, la fonction $\mathrm{G} : x \longmapsto \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

Théorème 4.2 (de comparaison) *On suppose que :*

$$\forall x \in [a, b[, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x).$$

(i) Si $\int_a^{\to b} g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

(ii) Si $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente, alors $\int_a^{\to b} g(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Exemple 4.3 Nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-\mathbf{e}^{-t}}.$$

4.2 Déclinaisons du théorème de comparaison

Proposition 4.4 *On suppose que f et g sont positives au voisinage de b et que $f(x) = \mathcal{O}\big(g(x)\big)$ lorsque $x \to b$ (c'est en particulier le cas lorsque $f(x) = o\big(g(x)\big)$ lorsque $x \to b$).*

(i) Si $\int_a^{\to b} g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

(ii) Si $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente, alors $\int_a^{\to b} g(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Exemple 4.5 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha \mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

PROPOSITION 4.6 (RÈGLE DES ÉQUIVALENTS) *On suppose que g est positive au voisinage de b.*
Si $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \to b$, alors les intégrales $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{\to b} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Exemple 4.7 Nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{t}}{\sin 2t - \sin t}\,\mathrm{d}t$.

4.3 Comparaison aux intégrales de Riemann (HP)

On dispose des résultats suivants, hors-programme mais très utiles en pratique. Il faut les redémontrer très rapidement (cf. TD) à chaque utilisation : il s'agit seulement d'appliquer le théorème de comparaison à f et à une fonction de la forme $g : x \longmapsto 1/x^\alpha$.

PROPOSITION 4.8 *Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur un intervalle semi-ouvert non majoré.*
On suppose qu'il existe $\alpha \geqslant 1$ pour lequel :

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

(i) si $\alpha > 1$ et $\ell < +\infty$, alors l'intégrale $\int_a^{\to +\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente ;
(ii) si $\alpha = 1$ et $\ell > 0$, alors l'intégrale $\int_a^{\to +\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Exemple 4.9 L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\to +\infty} \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exemple 4.10 L'intégrale de Bertrand $\displaystyle\int_2^{\to +\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

PROPOSITION 4.11 *Soit $f :]0, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur un intervalle semi-ouvert de la forme $]0, b]$ ($b > 0$ réel).*
On suppose qu'il existe $\alpha \leqslant 1$ pour lequel :

$$\lim_{x \to 0} x^\alpha f(x) = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

(i) si $\alpha < 1$ et $\ell < +\infty$, alors l'intégrale $\int_{\to 0}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente ;
(ii) si $\alpha = 1$ et $\ell > 0$, alors l'intégrale $\int_{\to 0}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Exemple 4.12 L'intégrale de Bertrand $\displaystyle\int_{\to 0}^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \left|\ln t\right|^\beta}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

5. Intégrales absolument convergentes

Soit f une fonction continue sur un intervalle I d'extrémités $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$, sauf peut-être en un nombre fini de points de $]a, b[$.

DÉFINITION 5.1 *On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.*

THÉORÈME 5.2 *Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Remarque 5.3 L'intérêt pratique du théorème précédent est évident : pour étudier la nature d'une intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, on commence par étudier sa convergence absolue, en appliquant à $|f|$ les méthodes développées au paragraphe précédent pour les fonctions positives (comparaison, comparaison aux intégrales de Riemann, règle des équivalents).

Proposition 5.4 (Inégalité triangulaire intégrale) *Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors :*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 5.5 Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ converge et appartient à l'intervalle $[-1, 1]$.

Le passage par la convergence absolue autorise à retirer l'hypothèse de positivité dans *certains* résultats du paragraphe précédent. Par exemple,

Proposition 5.6 *Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle semi-ouvert $[a, b[$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$).*
On suppose que $f(x) = \mathscr{O}\big(g(x)\big)$ lorsque $x \to b$ et que g est positive au voisinage de b.
Si l'intégrale $\int_a^{\to b} g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors l'intégrale $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

Remarque 5.7 La réciproque du théorème 5.2 est fausse ! Il arrive qu'une intégrale converge mais ne converge pas absolument ; de telles intégrales sont appelées intégrales **semi-convergentes** et leur étude est en général délicate car on ne dispose pas de résultats aussi simples et puissants que ceux développés pour les fonctions à valeurs réelles positives : un changement de variable, une intégration par parties ou un développement asymptotique de f pourront être utiles.

Exemple 5.8 L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente (cf. TD).

6. Outils de calcul intégral

6.1 Changement de variable

Théorème 6.1 *Soient $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle $]a, b[$ ($a < b \in \overline{\mathbb{R}}$) et φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, strictement monotone, réalisant une bijection d'un intervalle $]\alpha, \beta[$ ($\alpha < \beta \in \overline{\mathbb{R}}$) sur $]a, b[$.*
Les intégrales généralisées

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \textit{et} \qquad \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature et, en cas de convergence, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \quad \textit{si } \varphi \textit{ est croissante}$$
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \quad \textit{si } \varphi \textit{ est décroissante.}$$

Remarques 6.2
- On notera que le théorème de changement de variable fournit, en plus d'une relation entre deux intégrales convergentes, un moyen d'étudier la nature d'une intégrale généralisée.
- En particulier, on notera qu'un changement de variable affine préserve la nature d'une intégrale généralisée. Pour étudier la nature d'une intégrale généralisée du type $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $a < b \in \mathbb{R}$, on pourra donc effectuer le changement de variable affine $u = b - t$, afin de se ramener à une intégrale

généralisée $\int_{\to 0}^{b-a} f(b-u)\,\mathrm{d}u$, dont la borne de généralisation est en 0, où l'on dispose des équivalents usuels.

Exemples 6.3 Calculer les intégrales :

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \text{et} \qquad \int_{0}^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

6.2 Intégration par parties

On n'énoncera pas dans ce cours de résultat général sur l'intégration par parties. On prendra soin, en pratique, de n'effectuer d'intégration par parties que sur les intégrales partielles, puis de passer à la limite si possible pour en déduire un résultat sur les intégrales généralisées.

Exemple 6.4 Démontrer la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Remarque 6.5 On notera qu'une intégration par parties permet non seulement de calculer une intégrale généralisée convergente, mais aussi de déterminer la nature d'une intégrale généralisée.

7. Comparaison série-intégrale

Théorème 7.1 *Soit $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante sur un intervalle semi-ouvert non majoré.*
La série $\sum_{n\geqslant a} f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Remarque 7.2 L'intérêt du résultat précédent est qu'il est en général plus facile d'étudier la nature de l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ que celle de la série $\sum f(n)$, car on dispose pour les intégrales des techniques du changement de variable, de l'intégration par parties ou plus généralement du calcul de primitives, qui n'ont pas leur équivalent pour les séries.

Exemple 7.3 Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$ en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$.

On renvoie aux T.D. pour plus de détails.

8. Intégrales classiques

8.1 Intégrale de Gauss

Théorème 8.1 *Les deux intégrales généralisées ci-dessous convergent et ont pour valeur :*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

8.2 Fonction Gamma

Définition 8.2 *On appelle* ***fonction Gamma (d'Euler)*** *la fonction Γ définie, sous réserve de convergente, par :*

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 8.3 *(i) La fonction Γ est définie sur $]0,+\infty[$.*

(ii) *Pour tout* $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
(iii) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
(iv) *On a* $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.