*Chapitre 5 :*

# ALGÈBRE LINÉAIRE : RÉVISIONS ET COMPLÉMENTS

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou celui $\mathbb{C}$ des complexes.

# 1. Espaces vectoriels

## 1.1 Notion d'espace vectoriel

Définition 1.1 *On appelle $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** tout triplet $(\mathrm{E}, +, \cdot)$ formé d'un ensemble $\mathrm{E}$, d'une loi de composition interne $+$ sur $\mathrm{E}$ et d'une loi externe $\cdot : \mathbb{K} \times \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ à domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$ tel que :*
- $(\mathrm{E}, +)$ *est un groupe abélien :*
  - *la loi $+$ est associative : pour tous $x, y, z \in \mathrm{E}$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ ;*
  - *la loi $+$ est commutative : pour tous $x, y \in \mathrm{E}$, $x + y = y + x$ ;*
  - *il existe un (unique) élément de $\mathrm{E}$, noté $0$ (éventuellement $0_{\mathrm{E}}$) et appelé élément nul (ou vecteur nul) de $\mathrm{E}$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $x + 0 = x$ ;*
  - *pour tout $x \in \mathrm{E}$, il existe un (unique) élément de $\mathrm{E}$, noté $-x$ et appelé opposé de $x$, tel que $x+(-x) = 0$ ;*
- *pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \mathrm{E}$, $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ ;*
- *pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathrm{E}$, $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ ;*
- *pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathrm{E}$, $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ ;*
- *pour tout $x \in \mathrm{E}$, $1_{\mathbb{K}}x = x$.*

*Remarques 1.2*
- Souvent, on utilise seulement la lettre E pour désigner un espace vectoriel $(\mathrm{E}, +, \cdot)$ et on omet la mention de $\cdot$ dans les calculs, comme cela a été fait dans la définition précédente : on note $\lambda x$ plutôt que $\lambda \cdot x$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathrm{E}$.
- Les éléments de E sont appelés *vecteurs*, ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.

*Exemple 1.3* L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois

$$\big((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n\big) \longmapsto (x_i + y_i)_{i=1}^n \quad \text{et} \quad \big(\lambda, (x_i)_{i=1}^n\big) \longmapsto (\lambda x_i)_{i=1}^n.$$

Plus généralement, si $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors les formules précédentes munissent le produit cartésien $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelée **espace vectoriel produit** des $\mathrm{E}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

*Exemple 1.4* Soient X un ensemble non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On munit l'ensemble des applications de X dans E, noté $\mathrm{E}^{\mathrm{X}}$ ou $\mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathrm{E})$, d'une addition et d'un produit externe :
- la somme $f + g$ de deux éléments $f, g$ de $\mathrm{E}^{\mathrm{X}}$ est définie par $f + g : x \in \mathrm{X} \longmapsto f(x) + g(x) \in \mathrm{E}$ ;
- le produit $\lambda f$ d'un élément $f$ de $\mathrm{E}^{\mathrm{X}}$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est défini par $\lambda f : x \in \mathrm{X} \longmapsto \lambda f(x) \in \mathrm{E}$.

Muni de ces lois, $\mathrm{E}^{\mathrm{X}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
En particulier, l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ et celui $\mathbb{K}^{\mathrm{I}}$ des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont naturellement des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

*Exemple 1.5* L'ensemble $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.

Proposition 1.6 *Soient $\mathrm{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathrm{E}$.*
*On a :*

$$\lambda x = 0 \iff \big(\lambda = 0 \text{ ou } x = 0\big).$$

## 1.2 Sous-espaces vectoriels

Dans toute la section, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 1.7 *On appelle **sous-espace vectoriel** de $\mathrm{E}$ toute partie $\mathrm{F}$ de $\mathrm{E}$ telle que :*
- $\mathrm{F}$ *est stable par l'addition de $\mathrm{E}$ : pour tous $x, y \in \mathrm{F}$, $x + y \in \mathrm{F}$ ;*

- F *est stable par le produit externe : pour tous* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $x \in \mathrm{F}$, $\lambda x \in \mathrm{F}$ *;*
- F *est muni d'une structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel pour les lois induites par celles de* E.

Théorème 1.8 *Soit* F *une partie de* E.
*L'ensemble* F *est un sous-espace vectoriel de* E *si, et seulement si, les conditions suivantes sont réalisées :*
- F *est non vide ;*
- F *est stable par combinaisons linéaires : pour tous* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $x, y \in \mathrm{F}$, $\lambda x + y \in \mathrm{F}$.

*Remarque 1.9* On peut remplacer, dans la caractérisation précédente, la condition $\mathrm{F} \neq \emptyset$ par $0 \in \mathrm{F}$. Ainsi, étant donné un sous-espace vectoriel F de E, son complémentaire $\mathrm{E} \setminus \mathrm{F}$ n'est jamais un sous-espace vectoriel de E !

*Exemples 1.10*
- L'ensemble des suites bornées à termes dans $\mathbb{K}$, l'ensemble des suites convergentes à termes dans $\mathbb{K}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- L'ensemble $\mathscr{C}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ des fonctions continues sur un intervalle I donné de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathrm{I}}$.

*Exemple 1.11* Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, l'ensemble $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. L'ensemble des polynômes de degré égal à $n$ n'en est pas un !

Lemme 1.12 *Soit* $(\mathrm{F}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *une famille de sous-espaces vectoriels de* E.
*Leur intersection* $\mathrm{F} = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{F}_i$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Proposition-Définition 1.13 *Soit* A *une partie de* E.
*Parmi les sous-espaces vectoriels de* E *contenant* A*, il en est un, et un seul, qui est inclus dans tous les autres ; on l'appelle le* ***sous-espace vectoriel de* E *engendré par* A** *et on le note* Vect A.

Proposition-Définition 1.14 *Soit* A *une partie de* E.
*Le sous-espace vectoriel de* E *engendré par* A *est l'ensemble des* ***combinaisons linéaires*** *d'éléments de* A *:*

$$\operatorname{Vect} \mathrm{A} = \left\{ x \in \mathrm{E} : \exists r \geqslant 0, \exists (\lambda_i)_{i=1}^r \in \mathbb{K}^r, \exists (a_i)_{i=1}^r \in \mathrm{A}^r, x = \sum_{i=1}^r \lambda_i a_i \right\}.$$

*Exemple 1.15* Le sous-espace vectoriel engendré par un vecteur $x \neq 0$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $\lambda x$, $\lambda \in \mathbb{K}$, appelé droite vectorielle dirigée par $x$ et noté $\operatorname{Vect}(x) = \mathbb{K}x$.

*Remarque 1.16* Attention, la réunion de plusieurs sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel en général (même dans le cas de deux sous-espaces). C'est pourquoi on s'intéresse à la notion suivante.

Proposition-Définition 1.17 *Soient* $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_n$ *des sous-espaces vectoriels de* E.
*On appelle* ***somme*** *des sous-espaces vectoriel* $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_n$*, et l'on note* $\sum_{i=1}^n \mathrm{F}_i = \mathrm{F}_1 + \dots + \mathrm{F}_n$*, le sous-espace vectoriel de* E *engendré par* $\mathrm{F}_1 \cup \dots \cup \mathrm{F}_n$.
*Il s'agit du plus petit sous-espace vectoriel de* E *(pour l'inclusion) contenant les sous-espaces vectoriels* $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_n$.
*Il est composé des vecteurs de la forme* $x = x_1 + \dots + x_n$*, où* $x_i \in \mathrm{F}_i$ *pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$.

*Exemple 1.18* Pour $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{E}$, on a $\operatorname{Vect}\{x_1, \dots, x_n\} = \mathbb{K}x_1 + \dots + \mathbb{K}x_n$.

### *1.3 Familles libres, familles génératrices et bases*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et I un ensemble non vide.

Définition 1.19
- *On appelle* ***famille*** *d'éléments de* E *indexée par l'ensemble* I *toute application* $x : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{E}$. *Pour* $i \in \mathrm{I}$*, on note* $x_i$ *plutôt que* $x(i)$ *et on désigne la famille* $x$ *par* $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$.
- *L'image d'une famille* $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *d'éléments de* E *est notée* $\{x_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ *; c'est une partie de* E.
- *Une famille* $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *est dite finie lorsque l'ensemble* I *est fini.*

Définition 1.20 *Soient $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de* E *et* J *une partie de* I.
*On dit que $(x_j)_{j\in \mathrm{J}}$ est une **sous-famille** de $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ et que $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est une **sur-famille** de $(x_j)_{j\in \mathrm{J}}$.*

Dans toute la suite de la section, on suppose que l'ensemble I est fini et on se donne une famille $\underline{x} = (x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ d'éléments de E (notée plutôt $(x_i)_{i=1}^n = (x_1, \dots, x_n)$ si $\mathrm{I} = [\![1, n]\!]$).

On étudie à présent les *combinaisons linéaires* formées à partir de cette famille. Pour ce faire, on introduit l'application

$$f_{\underline{x}} : \mathbb{K}^{\mathrm{I}} \longrightarrow \mathrm{E}, (\lambda_i)_{i\in \mathrm{I}} \longmapsto \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i x_i.$$

Définition 1.21 *On dit que la famille $\underline{x}$ est :*
- ***libre** si l'application $f_{\underline{x}}$ est injective ;*
- ***génératrice** si l'application $f_{\underline{x}}$ est surjective ;*
- *une **base** de* E *si l'application $f_{\underline{x}}$ est bijective.*

Proposition 1.22 *La famille $\underline{x}$ est :*

*(i) libre si, et seulement si,*

$$\forall (\lambda_i)_{i\in \mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{\mathrm{I}}, \qquad \Big( \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i x_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \big(\forall i \in \mathrm{I}, \lambda_i = 0\big) \Big) ;$$

*(ii) génératrice si, et seulement si, tout élément de* E *est combinaison linéaire de $\underline{x}$ i.e. si, et seulement si, le sous-espace vectoriel engendré par $\{x_i\}_{i\in \mathrm{I}}$ est égal à* E *;*

*(iii) une base si, et seulement si, tout élément $y \in \mathrm{E}$ s'écrit de façon unique sous la forme $y = \sum_i \lambda_i x_i$ avec $(\lambda_i)_{i\in \mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{\mathrm{I}}$. On dit alors que les $\lambda_i$, $i \in \mathrm{I}$, sont les coordonnées du vecteur $y$ dans la base $\underline{x}$.*

*Exemples 1.23* • N'importe quel vecteur non nul d'une droite vectorielle en forme une base.
- Les vecteurs $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ forment une base de $\mathbb{K}^n$ dite canonique.
- La famille $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \dots, \mathrm{X}^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$, appelée base canonique de cet espace.

Définition 1.24 *On dit que la famille $\underline{x}$ est **liée** si elle n'est pas libre.*

Proposition 1.25 *Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute sur-famille d'une famille liée est liée. Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.*

*Remarques 1.26* • Lorsque l'ensemble I est infini, on dit qu'une famille $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est libre si toutes ses sous-familles finies sont libres.
Une famille $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est donc liée si, et seulement si, il en existe une sous-famille finie qui est liée.
- Les vecteurs composant une partie A de E sont dits **linéairement indépendants** (resp. **linéairement dépendants**) si la famille $(a)_{a\in \mathrm{A}}$ est libre (resp. liée).

Théorème 1.27 *Soit $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de vecteurs de* E.
*La famille $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est liée si, et seulement si, il existe $i_0 \in \mathrm{I}$ tel que $x_{i_0}$ soit combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in \mathrm{I}\setminus\{i_0\}}$.*

*Remarque 1.28* Attention : l'énoncé précédent exprime que l'un des vecteurs d'une famille liée est combinaison linéaire des autres, mais il n'en va pas de même de tous les vecteurs de la famille en général.
Ainsi, étant donnés deux vecteurs $x$, $y$ de E, les énoncés
(i) la famille $(x, y)$ est liée ;
(ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$ (autrement dit, $y$ est colinéaire à $x$)
*ne sont pas* équivalents ! On a bien sûr (ii) implique (i), mais la réciproque est fausse. Il suffit de considérer le contre-exemple donné par $x = 0$ et un vecteur $y \neq 0$.
Le théorème précédent exprime seulement l'équivalence de (i) avec
(ii′) $x$ est colinéaire à $y$ ou $y$ est colinéaire à $x$.

Il est toutefois un cas dans lequel on est assuré qu'un vecteur donné d'une famille liée est combinaison linéaire des autres ; c'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 1.29 *Soient* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille liée de vecteurs de* $E$ *et* $i_0 \in I$.
*Si la famille* $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ *est libre, alors* $x_{i_0}$ *est combinaison linéaire de la famille* $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$.

Corollaire 1.30 *Toute famille de polynômes non nuls et de degrés deux-à-deux distincts est libre.*

### 1.4 Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition 1.31 *On dit qu'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel est de* ***dimension finie*** *s'il admet une famille génératrice finie ; dans le cas contraire, on dit qu'il est de dimension infinie.*

Théorème 1.32 (de la base incomplète) *Soient* $E$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie.*
*Toute famille libre de* $E$ *peut être complétée en une base de* $E$*. Les vecteurs à ajouter peuvent être choisis dans une famille génératrice donnée à l'avance.*

Corollaire 1.33 *Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.*

Théorème 1.34 *Soit* $E$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie.*
*Toutes les bases de* $E$ *sont finies et ont même cardinal.*

Définition 1.35 *Soit* $E$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie.*
*On appelle* ***dimension*** *de* $E$*, et on note* $\dim E$*, la valeur commune des cardinaux des bases de* $E$.

*Exemples 1.36* Au vu des exemples 1.23,
- Les droites vectorielles sont les espaces vectoriels de dimension 1.
- L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension $n$.
- L'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$.

Proposition 1.37 *Soit* $E$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n$.
*(i) Toute famille libre de* $E$ *est finie et a un cardinal inférieur ou égal à* $n$ *avec égalité si, et seulement si, c'est une base de* $E$.
*(ii) Toute famille génératrice finie de* $E$ *a un cardinal supérieur ou égal à* $n$ *avec égalité si, et seulement si, c'est une base de* $E$.

Proposition 1.38 *Soient* $E_1$ *et* $E_2$ *des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie.*
*L'espace produit* $E = E_1 \times E_2$ *est de dimension finie :* $\dim E_1 \times E_2 = \dim E_1 + \dim E_2$.

Proposition 1.39 *Soient* $E$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $F$ *un sous-espace vectoriel de* $E$.
*(i) L'espace vectoriel* $F$ *est de dimension finie ;*
*(ii) On a* $\dim F \leqslant \dim E$ *avec égalité si, et seulement si,* $F = E$.

Théorème 1.40 (Formule de Grassman) *Soient* $E$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $F, G$ *deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de* $E$.
*Le sous-espace* $F+G$ *est un sous-espace vectoriel de dimension finie de* $E$*, et*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G).$$

### 1.5 Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 1.41 *Soit* $(x_1, \ldots, x_n)$ *une famille d'éléments de* $E$.

*On appelle* **rang** *de* $(x_1, \dots, x_n)$*, et on note* $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n)$*, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble* $\{x_1, \dots, x_n\}$*.*

Proposition 1.42 *Soit* $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ *une famille d'éléments de* E*.*
*Le rang de la famille* $\underline{x}$ *est le plus grand entier parmi les cardinaux des sous-familles libres de* $\underline{x}$*.*

Corollaire 1.43 *Un n-uplet* $(x_1, \dots, x_n)$ *de vecteurs de* E *est libre si, et seulement si, son rang est égal à n.*

## 2. Calcul matriciel

Ce paragraphe est essentiellement technique. Les énoncés et méthodes doivent être maîtrisées. Seuls quelques points importants sont rappelés, pour le reste on renvoie au cours de première année et aux TD.

Soient $n, p, q \geqslant 1$ trois entiers. On note $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

### 2.1 Opérations matricielles

L'addition de deux matrices de $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et la multiplication par un scalaire sont définies coefficient par coefficient. Ces opérations font de $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Les matrices $\mathrm{E}_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$, dont tous les coefficients sont nuls sauf le $(i,j)$-ième qui vaut 1, forment une base de $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dite canonique. L'espace vectoriel $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc de dimension $np$.

Le produit de deux matrices A et B n'est défini que dans le cas où B a autant de lignes que A a de colonnes. Pour $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on définit $\mathrm{C} = \mathrm{AB} = (c_{i,j}) \in \mathbf{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par son coefficient générique :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Définition 2.1 (Puissances et polynômes de matrices) *Soit* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée.*
*(i) On définit les puissances de la matrice* A *par la condition initiale* $\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_n$ *et la relation de récurrence* $\mathrm{A}^{k+1} = \mathrm{AA}^k = \mathrm{A}^k\mathrm{A}$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$*.*
*(ii) Pour* $\mathrm{P} = \sum_k \alpha_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$*, on définit la matrice* $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *par la formule* $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \sum_k \alpha_k \mathrm{A}^k$*.*

Proposition 2.2 *Soit* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée.*
*Pour tous polynômes* $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *et tout scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}$*, on a :*

$$(\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q})(\mathrm{A}) = \lambda\mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{Q}(\mathrm{A}) \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{PQ})(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{Q}(\mathrm{A}).$$

Corollaire 2.3 *Soit* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée.*
*Deux polynômes en* A *commutent : pour tous* $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{Q}(\mathrm{A}) = \mathrm{Q}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{A})$.

Proposition 2.4 (Formule du binôme de Newton) *Soient* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *deux matrices carrées.*
*Si* $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ *alors :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (\mathrm{A}+\mathrm{B})^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathrm{A}^j \mathrm{B}^{k-j}.$$

Proposition 2.5 *Soient* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *deux matrices carrées.*
*(i) On a* ${}^t(\mathrm{AB}) = {}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A}$ *;*
*(ii) Si* A *est inversible, alors* ${}^t\mathrm{A}$ *est inversible et* $({}^t\mathrm{A})^{-1} = {}^t(\mathrm{A}^{-1})$ *;*
*(iii) Si* A *et* B *sont inversibles, alors* AB *est inversible et* $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$*.*

### 2.2 Matrices par blocs

La représentation des matrices par blocs consiste à écrire les coefficients d'une matrice en les regroupant par blocs rectangulaires : étant données des matrices $A_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant t$, de tailles respectives $n_i \times p_j$, le tableau :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s,1} & \cdots & A_{s,t} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

représente la matrice à $n_1 + \cdots + n_s$ lignes et $p_1 + \cdots + p_t$ colonnes obtenue en remplaçant dans (2.1) chaque matrice $A_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant t$, par le tableau de ses coefficients.
Noter qu'une matrice peut admettre une représentation carrée par blocs sans être elle-même carrée.

On admet que pour des matrices $A, A', B, B', C, C', D, D'$, on a la formule :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

dès que les nombres de colonnes de A et de B sont respectivement égaux aux nombres de lignes de $A'$ et $C'$ (bref, dès que la formule a un sens). Il convient de faire attention à l'ordre des produits intérieurs puisque le produit matriciel n'est pas commutatif ! On aurait un énoncé similaire avec davantage de blocs.

### 2.3 Algorithme du pivot de Gauss

L'algorithme du pivot de Gauss est fondamental ; il est indispensable de savoir le mettre en œuvre. Il intervient dans les algorithmes

- de calcul du rang d'une matrice $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (on rappelle que le rang de A est le rang de la famille de ses colonnes dans $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, i.e. la dimension du sous-espace de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes de A) ;
- de calcul de l'inverse d'une matrice $A \in \mathbf{Gl}_n(\mathbb{K})$ ;
- de résolution d'un système linéaire.

On renvoie au cours de première année et aux TD pour la description de ces algorithmes et des exemples d'application.

### 2.4 Trace d'une matrice carrée

Définition 2.6 *Soit* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée.*
*On appelle* ***trace*** *de* A*, et on note* tr A*, le scalaire*

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Proposition 2.7 *On a :*

$$\forall (A, B) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$$

*et :*

$$\forall (A, B) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

## 3. Applications linéaires

### 3.1 Généralités

Définition 3.1 *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels.*
*On appelle* ***application linéaire*** *de* E *dans* F *toute application* $f : E \longrightarrow F$ *telle que :*

- *pour tous* $x, y \in E$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ;
- *pour tous* $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Proposition 3.2 *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ *une application.*
*L'application* $f$ *est linéaire si, et seulement si,*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Définition 3.3 *Soient* E, F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels.*

- *On appelle* ***endomorphisme*** *de* E *toute application linéaire de* E *dans lui-même.*
- *On appelle* ***isomorphisme*** *de* E ***sur*** F *toute application linéaire bijective de* E *sur* F*. On dit que les espaces vectoriels* E *et* F *sont* ***isomorphes*** *s'il existe un isomorphisme de l'un sur l'autre.*
- *On appelle* ***automorphisme*** *de* E *tout isomorphisme de* E *sur lui-même.*

*Exemples 3.4*
- L'application $f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est une application linéaire de $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
- Étant donnés un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $\lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}} : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}, x \longmapsto \lambda x$ est un endomorphisme de E appelé **homothétie** de E de rapport $\lambda$.
- L'application $\mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}'$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
- L'application $\mathrm{P}(\mathrm{X}) \longmapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$ est un automorphisme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Proposition-Définition 3.5 *Soient* E, F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ *une application linéaire.*

*(i) l'image réciproque par* $f$ *d'un sous-espace vectoriel de* F *est un sous-espace vectoriel de* E*. C'est en particulier le cas du* ***noyau*** $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathrm{E} : f(x) = 0\}$ *de* $f$.

*(ii) l'image par* $f$ *d'un sous-espace vectoriel de* E *est un sous-espace vectoriel de* F*. C'est en particulier le cas de l'****image*** $\operatorname{Im} f = f(\mathrm{E}) = \{y \in \mathrm{F} : \exists x \in \mathrm{E}, y = f(x)\}$ *de* $f$.

Théorème 3.6 *Soient* E, F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ *une application linéaire.*

*(i) On a* $f(0) = 0$*. De plus,* $f$ *est injective si, et seulement si :*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \Big(f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0\Big).$$

*Autrement dit,* $f$ *est injective si, et seulement si, son noyau est réduit au vecteur nul :* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ *;*

*(ii)* $f$ *est surjective si, et seulement si, son image est égale à* F *:* $\operatorname{Im} f = \mathrm{F}$.

Soient E un espace vectoriel, $u$ un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel. On peut toujours considérer la restriction de $u$ à F, définie par $u|_{\mathrm{F}} : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}, x \longmapsto u(x)$, qui est une application linéaire de F dans E.

Proposition-Définition 3.7 *On dit que le sous-espace vectoriel* F *est* ***stable*** *par* $u$ *si* $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$*, i.e. si, pour tout* $x \in \mathrm{F}$, $u(x) \in \mathrm{F}$.
*Dans ces conditions, on appelle* ***endomorphisme induit*** *par* $u$ *sur* F*, et l'on note* $u_{\mathrm{F}}$*, l'application définie par* $u_{\mathrm{F}} : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F}, x \longmapsto u(x)$*. C'est un endomorphisme de* F.

### *3.2 Opérations sur les applications linéaires*

Théorème 3.8 *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels.*
*L'ensemble* $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *des applications linéaires de* E *dans* F *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel pour les lois* $+$ *et* $\cdot$ *définies dans l'exemple 1.4.*
*On note* $\mathbf{L}(\mathrm{E}) = \mathbf{L}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ *l'espace vectoriel des endomorphismes de* E.

Proposition 3.9 *Soient* E, F, G *trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}$ *deux applications linéaires.*
*La composée* $g \circ f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G}$ *est linéaire.*

Définition 3.10 (Itérés et polynômes d'endomorphismes) *Soient* E *un espace vectoriel et* $u$ *un endomorphisme de* E.

*(i) On définit les itérés de* $u$ *par la condition initiale* $u^0 = \mathrm{id}_E$ *et la relation de récurrence* $u^{k+1} = u \circ u^k = u^k \circ u$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

*(ii) Pour* $P = \sum_k \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, *on définit l'endomorphisme* $P(u)$ *par la formule* $P(u) = \sum_k \alpha_k u^k$.

Proposition 3.11 *Soient* E *un espace vectoriel et* $u$ *un endomorphisme de* E.
*Pour tout polynômes* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ *et tout scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}$, *on a :*

$$(\lambda P + Q)(u) = \lambda P(u) + Q(u) \qquad \text{et} \qquad (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

Corollaire 3.12 *Soient* E *un espace vectoriel et* $u$ *un endomorphisme de* E.
*Deux polynômes en* $u$ *commutent : pour tous* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

### 3.3 Images des vecteurs d'une base de l'espace de départ

Théorème 3.13 *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Soient* $\underline{e} = (e_i)_{i \in I}$ *une base de* E *et* $(y_i)_{i \in I}$ *une famille de vecteurs de* F *indexée par le même ensemble* I.

*(i) Il existe une application linéaire, et une seule,* $f : E \longrightarrow F$ *telle que* $f(e_i) = y_i$ *pour tout* $i \in I$.

*(ii)* $f$ *est injective si, et seulement si, la famille* $(y_i)_{i \in I}$ *est libre.*

*(iii)* $f$ *est surjective si, et seulement si, la famille* $(y_i)_{i \in I}$ *est génératrice.*

*(iv)* $f$ *est un isomorphisme si, et seulement si, la famille* $(y_i)_{i \in I}$ *est une base de* F.

*Remarque 3.14* Le théorème précédent est fondamental. On retiendra en particulier que deux applications linéaires sur E sont égales si, et seulement si, elles prennent les mêmes valeurs sur les vecteurs d'une base de E.

Théorème 3.15 *Deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si, ils ont même dimension.*

*Remarques 3.16* • Ainsi la dimension permet de classifier les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

- Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$, chaque choix d'une base $\underline{e} = (e_i)_{i=1}^n$ de E fournit un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur E : $(x_i)_{i=1}^n \longmapsto \sum_i x_i e_i$.
  Le choix d'une base de E permet donc d'identifier E à $\mathbb{K}^n$ (cette identification n'étant pas canonique puisqu'elle dépend du choix d'une base de E).

### 3.4 Rang d'une application linéaire

Définition 3.17 *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie et* $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire.*
*On appelle* ***rang*** *de* $f$, *et on note* $\mathrm{rg}\, f$, *la dimension du sous-espace* $\mathrm{Im}\, f$.

Théorème 3.18 (du rang) *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie et* $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire.*
*On a :*

$$\dim E = \mathrm{rg}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f.$$

Corollaire 3.19 *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie et* $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire.*

*(i) On a* $\mathrm{rg}\, f \leqslant \dim E$ *avec égalité si, et seulement si,* $f$ *est injectif.*

*(ii) On a* $\mathrm{rg}\, f \leqslant \dim F$ *avec égalité si, et seulement si,* $f$ *est surjectif.*

Proposition 3.20 *Soient* $E, F, G$ *des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie et* $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ *deux applications linéaires.*
*Si* $f$ *est bijectif, alors* $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$*. Si* $g$ *est bijectif, alors* $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$*.*

Théorème 3.21 *Soient* $E$, $F$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie tels que* $\dim E = \dim F$*. Pour une application linéaire* $f : E \longrightarrow F$*, on a équivalence entre :*

*(i)* $f$ *est injectif ;*
*(ii)* $f$ *est surjectif ;*
*(iii)* $f$ *est bijectif ;*
*(iv) il existe* $g \in \mathbf{L}(F, E)$ *tel que* $g \circ f = \mathrm{id}_E$ *;*
*(v) il existe* $h \in \mathbf{L}(F, E)$ *tel que* $f \circ h = \mathrm{id}_F$*.*

## 4. Représentations matricielles

### *4.1 Représentations matricielles*

Définition 4.1 *Soit* $E$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie rapporté à une base* $\underline{e} = (e_i)_{i=1}^n$*.*

- *On appelle matrice représentative d'un vecteur* $x \in E$ *dans la base* $\underline{e}$ *la matrice colonne* ${}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *dont les composantes sont les coordonnées de* $x$ *dans la base* $\underline{e}$ *:*
$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$
- *On appelle matrice représentative d'un* $p$*-uplet* $(x_1, \ldots, x_p)$ *de vecteurs de* $E$ *dans la base* $\underline{e}$ *la matrice de* $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *dont la* $j$*-ième colonne est la matrice représentative du vecteur* $x_j$ *dans la base* $\underline{e}$ *pour tout* $j \in [\![1, p]\!]$*.*

Définition 4.2 *Soient* $E$ *et* $F$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie rapportés respectivement à des bases* $\underline{u} = (u_j)_{j=1}^p$ *et* $\underline{v} = (v_i)_{i=1}^n$*.*

- *On appelle matrice représentative d'une application linéaire* $f : E \longrightarrow F$ *dans les bases* $\underline{u}$ *et* $\underline{v}$*, et on note* $\operatorname{Mat}(f; \underline{u}, \underline{v})$*, la matrice de* $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *représentative du* $p$*-uplet* $\big(f(u_1), \ldots, f(u_p)\big)$ *dans la base* $\underline{v}$*.*
- *On appelle matrice représentative d'un endomorphisme* $f$ *de* $E$ *dans la base* $\underline{u}$*, et on note* $\operatorname{Mat}(f; \underline{u})$*, la matrice de* $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *représentative de l'application linéaire* $f$ *dans les bases* $\underline{u}$ *et* $\underline{u}$*.*

*Exemple 4.3* L'application linéaire $\mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2, (x, y, z) \longmapsto (x - \mathbf{i}y - 2z, 2\mathbf{i}x + z)$ est représentée dans les bases canoniques par la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{i} & -2 \\ 2\mathbf{i} & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{C}).$$

Proposition 4.4 *Soient* $E$ *et* $F$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie rapportés respectivement à des bases* $\underline{u}$ *et* $\underline{v}$*. Soit* $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire.*
*La matrice* $A$ *représentant* $f$ *dans les bases* $\underline{u}$ *et* $\underline{v}$ *est caractérisée par la propriété suivante : pour tous vecteurs* $x \in E$ *et* $y \in F$ *et leurs matrices représentatives* $X$ *et* $Y$ *dans les bases* $\underline{u}$ *et* $\underline{v}$*, on a*
$$y = f(x) \iff Y = AX.$$

Proposition 4.5 *Soient* $E$, $F$ *et* $G$ *trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimensions finies respectives* $p$*,* $n$ *et* $m$ *rapportés respectivement à des bases* $\underline{u}$*,* $\underline{v}$ *et* $\underline{w}$*.*

*(i) Pour toutes applications linéaires* $f, g : E \longrightarrow F$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{K}$*,*
$$\operatorname{Mat}(\lambda f + g; \underline{u}, \underline{v}) = \lambda \operatorname{Mat}(f; \underline{u}, \underline{v}) + \operatorname{Mat}(g; \underline{u}, \underline{v}).$$
*(ii) L'application* $\mathbf{L}(E, F) \longrightarrow \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}), f \longmapsto \operatorname{Mat}(f; \underline{u}, \underline{v})$ *est un isomorphisme.*

*(iii) Pour deux applications linéaires* $f : E \longrightarrow F$ *et* $g : F \longrightarrow G$*,*
$$\operatorname{Mat}(g \circ f; \underline{u}, \underline{w}) = \operatorname{Mat}(g; \underline{v}, \underline{w}) \times \operatorname{Mat}(f; \underline{u}, \underline{v}).$$

COROLLAIRE 4.6 *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie.*
*L'espace vectoriel* $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *est de dimension finie* $\dim \mathbf{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) = (\dim \mathrm{E})(\dim \mathrm{F})$. *En particulier, l'espace vectoriel est de dimension finie* $\dim \mathbf{L}(\mathrm{E}) = (\dim \mathrm{E})^2$.

COROLLAIRE 4.7 *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de même dimension finie n rapportés respectivement à des bases* $\underline{u} = (u_j)_{j=1}^n$ *et* $\underline{v} = (v_i)_{i=1}^n$. *Soient* $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ *une application linéaire et* $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}(f; \underline{u}, \underline{v}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *sa matrice représentative dans les bases* $\underline{u}$ *et* $\underline{v}$.
*L'application linéaire* $f$ *est bijective si, et seulement si, la matrice* A *est inversible et alors* $\mathrm{Mat}(f^{-1}; \underline{v}, \underline{u}) = \mathrm{A}^{-1}$.

### 4.2 Interprétation géométrique canonique des matrices

Dans la section précédente, on a associé une matrice à toute application linéaire $\mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ après avoir fait le choix de bases de E et F.
Inversement, étant donnée une matrice $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le choix de deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F de dimensions respectives $p$ et $n$ et de bases $\underline{u}$ et $\underline{v}$ respectivement de E et F, permet d'associer à A une application linéaire $\mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ représentée par A dans les bases $\underline{u}$ et $\underline{v}$. Parmi toutes ces applications linéaires représentées par A, il en est une que l'on qualifie de canonique.

DÉFINITION 4.8 *Soit* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
*On appelle* ***application linéaire canoniquement associée*** *à* A, *et on note parfois* $\phi_{\mathrm{A}}$, *l'application linéaire de* $\mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *dans* $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *définie par* $\mathrm{X} \longmapsto \mathrm{AX}$.

PROPOSITION 4.9 *Soit* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
*L'application linéaire canoniquement associée à* A *est représentée, dans les bases canoniques de* $\mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *et* $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, *par la matrice* A.

*Remarques 4.10*
- Cette association justifie qu'on parle parfois abusivement du noyau ou de l'image d'une matrice $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ou qu'on évoque son injectivité, sa surjectivité, etc. Il s'agit en fait des notions correspondantes pour l'application linéaire canoniquement associée à A.
- Les espaces $\mathbf{M}_{d,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^d$ étant canoniquement isomorphes, on considère parfois l'application linéaire canoniquement associée à une matrice $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ comme application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.

### 4.3 Changement de bases

LEMME 4.11 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie n rapporté à une base* $\underline{e}$. *Soient* $\underline{u} = (u_i)_{i=1}^p$ *une famille finie de vecteurs de* E *et* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *sa matrice représentative en base* $\underline{e}$.
*(i) On a* $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = \mathrm{rg}\,\mathrm{A}$.
*(ii) La famille* $\underline{u}$ *est une base de* E *si, et seulement si, la matrice* A *est (carrée) inversible.*

DÉFINITION 4.12 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie n et* $\underline{e}$, $\underline{e}' = (e_i')_{i=1}^n$ *deux bases de* E.
*On appelle* ***matrice de passage*** *de* $\underline{e}$ *à* $\underline{e}'$ *la matrice de* $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *représentative du n-uplet* $(e_1', \dots, e_n')$ *dans la base* $\underline{e}$.

PROPOSITION 4.13 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie,* $\underline{e}$, $\underline{e}'$ *et* $\underline{e}''$ *trois bases de* E, P *la matrice de passage de* $\underline{e}$ *à* $\underline{e}'$ *et* P′ *la matrice de passage de* $\underline{e}'$ *à* $\underline{e}''$.
*(i) La matrice* P *est inversible ; son inverse est la matrice de passage de* $\underline{e}'$ *à* $\underline{e}$.
*(ii) Le produit* PP′ *est la matrice de passage de* $\underline{e}$ *à* $\underline{e}''$.

PROPOSITION 4.14 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie n et* $\underline{e}$ *et* $\underline{e}'$ *deux bases de* E. *Soit* P *la matrice de passage de* $\underline{e}$ *à* $\underline{e}'$.
*Soient* $x \in \mathrm{E}$ *et* $\mathrm{X}, \mathrm{X}' \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *les colonnes des coordonnées du vecteur x dans les bases* $\underline{e}$ *et* $\underline{e}'$. *On a :*

$$\mathrm{X} = \mathrm{PX}'.$$

Proposition 4.15 *Soient* $\mathrm{E}, \mathrm{F}$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie,* $\underline{u}$, $\underline{u}'$ *deux bases de* $\mathrm{E}$ *et* $\underline{v}$, $\underline{v}'$ *deux bases de* $\mathrm{F}$*. Soient* $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ *une application linéaire et* $\mathrm{A}$ *(resp.* $\mathrm{A}'$*) la matrice représentant* $f$ *dans les bases* $\underline{u}$ *et* $\underline{v}$ *(resp. dans les bases* $\underline{u}'$ *et* $\underline{v}'$*).*
*Si* $\mathrm{P}$ *et* $\mathrm{Q}$ *désignent respectivement les matrices de passage de* $\underline{u}$ *à* $\underline{u}'$ *et de* $\underline{v}$ *à* $\underline{v}'$*, alors*

$$\mathrm{A}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}.$$

Proposition 4.16 *Soient* $\mathrm{E}$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $\underline{u}$, $\underline{u}'$ *deux bases de* $\mathrm{E}$*. Soient* $f$ *un endomorphisme de* $\mathrm{E}$ *et* $\mathrm{A}$ *(resp.* $\mathrm{A}'$*) la matrice représentant* $f$ *dans la base* $\underline{u}$ *(resp.* $\underline{u}'$*).*
*Si* $\mathrm{P}$ *est la matrice de passage de la base* $\underline{u}$ *à la base* $\underline{u}'$*, alors*

$$\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

### 4.4 Matrices semblables

Définition 4.17 *Deux matrices carrées* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *sont dites* ***semblables*** *s'il existe* $\mathrm{P} \in \mathbf{Gl}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.

*Remarque 4.18* D'après les formules de changement de base, deux matrices représentant un même endomorphisme dans des bases différentes sont semblables.
Réciproquement, si deux matrices carrées A et B de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables et si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ rapporté à une base $\underline{e}$, alors il existe une base $\underline{e}'$ de E et un endomorphisme de E qui est représenté par la matrice A dans la base $\underline{e}$ et par la matrice B dans la base $\underline{e}'$.

Proposition 4.19 *Deux matrices semblables ont même trace.*

### 4.5 Rang d'une matrice

Dans cette section, $n$ et $p$ désignent deux entiers naturels non nuls.

Proposition 4.20 *Une application linéaire entre deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie a même rang que chacune des matrices qui la représentent.*
*En particulier, une matrice* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *a même rang que l'application linéaire qui lui est canoniquement associée.*

Proposition 4.21 *Soit* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*. On a* $\mathrm{rg}\,{}^t\mathrm{A} = \mathrm{rg}\,\mathrm{A}$.

Les résultats sur le rang d'une application linéaire prennent alors la forme suivante en termes matriciels.

Proposition 4.22 *Soient* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*.*
*(i) On a* $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} \leqslant \min(n,p)$ *;*
*(ii) Pour* $\mathrm{P} \in \mathbf{Gl}_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(\mathrm{AP}) = \mathrm{rg}\,\mathrm{A}$ *;*
*(iii) Pour* $\mathrm{Q} \in \mathbf{Gl}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(\mathrm{QA}) = \mathrm{rg}\,\mathrm{A}$.

Corollaire 4.23 *Deux matrices semblables ont même rang.*

Théorème 4.24 *Pour une matrice carrée* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$*, on a équivalence entre :*
*(i)* $\forall \mathrm{X} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \mathrm{AX} = 0 \Longrightarrow \mathrm{X} = 0$ *;*
*(ii)* $\forall \mathrm{Y} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists \mathrm{X} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \mathrm{Y} = \mathrm{AX}$ *;*
*(iii)* $\forall \mathrm{Y} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists! \mathrm{X} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \mathrm{Y} = \mathrm{AX}$ *;*
*(iv)* $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = n$ *;*
*(v)* A *est inversible : il existe* $\mathrm{B} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *tel que* $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$ *;*
*(vi)* A *est inversible à gauche : il existe* $\mathrm{B} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *tel que* $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$ *;*
*(vii)* A *est inversible à droite : il existe* $\mathrm{B} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *tel que* $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$.

## 5. Sous-espaces supplémentaires, projecteurs et symétries

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E en nombre fini.

### 5.1 Sous-espaces en somme directe

On rappelle que

$$\sum_{i=1}^{r} F_i = F_1 + \cdots + F_r = \left\{ x \in E : \exists (x_i)_{i=1}^{r} \in \prod_{i=1}^{r} F_i, x = \sum_{i=1}^{r} x_i \right\}$$

est le sous-espace vectoriel engendré par $F_1 \cup \cdots \cup F_r$ : c'est le plus petit sous-espace (pour l'inclusion) contenant $F_1, \dots, F_r$.

PROPOSITION 5.1 *L'application* $\varphi : \prod_i F_i \longrightarrow E, (x_i)_i \longmapsto \sum_i x_i$ *est linéaire. Son image est la somme* $\sum_i F_i$.

DÉFINITION 5.2 *On dit que les sous-espaces vectoriels* $F_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, *sont en* ***somme directe****, et on désigne alors la somme* $\sum_i F_i$ *par* $\bigoplus_i F_i$, *si l'application linéaire* $\varphi : \prod_i F_i \longrightarrow E, (x_i)_i \longmapsto \sum_i x_i$ *est injective, i.e. induit un isomorphisme de* $\prod_i F_i$ *sur* $\sum_i F_i$.

*Remarque 5.3* La notation $\oplus$ ne doit pas être utilisée avant d'avoir justifié que la somme est directe.

PROPOSITION 5.4 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
*(i) la somme* $\sum_i F_i$ *est directe ;*
*(ii) pour tout* $x \in \sum_i F_i$, *il existe un unique* $(x_i)_i \in \prod_i F_i$ *tel que* $x = \sum_i x_i$ ;
*(iii) pour* $(x_i)_i \in \prod_i F_i$ *donné, on a* $\sum_i x_i = 0$ *si, et seulement si,* $x_i = 0$ *pour tout* $i \in [\![1, r]\!]$ ;
*(iv) (seulement pour* $r = 2$ *sous-espaces)* $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

*Remarque 5.5* Si $r \geqslant 3$, la condition $F_i \cap F_j = \{0\}$ pour tous $i \neq j$ (et donc a fortiori la condition $\bigcap_i F_i = \{0\}$ est nécessaire pour que la somme $\sum_i F_i$ soit directe, mais elle n'est pas suffisante.

PROPOSITION 5.6 *Si* E *est de dimension finie, on a :*

$$\dim \left( \sum_{i=1}^{r} F_i \right) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \dim F_i$$

*avec égalité si, et seulement si, la somme* $\sum_i F_i$ *est directe.*

### 5.2 Sous-espaces supplémentaires

DÉFINITION 5.7 *On dit que les sous-espaces vectoriels* $F_1, \dots, F_r$, *sont* ***supplémentaires*** *dans* E *lorsque leur somme est directe et égale à* E : $E = \bigoplus_i F_i$.

PROPOSITION 5.8 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
*(i) Les sous-espaces* $F_1, \dots, F_r$ *sont supplémentaires dans* E ;
*(ii) l'application* $\varphi : \prod_i F_i \longrightarrow E, (x_i)_i \longmapsto \sum_i x_i$ *est un isomorphisme.*
*(iii) pour tout* $x \in E$, *il existe un unique* $(x_i)_i \in \prod_i F_i$ *tel que* $x = \sum_i x_i$ ;
*(iv) (lorsque* E *est de dimension finie) la somme* $\sum_i F_i$ *est directe et* $\dim E = \sum_i \dim F_i$ ;
*(v) (lorsque* E *est de dimension finie)* $E = \sum_i F_i$ *et* $\dim E = \sum_i \dim F_i$.

*Exemple 5.9* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que les sous-espaces $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices respectivement symétriques et antisymétriques de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

THÉORÈME 5.10 *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $E_1, \dots, E_r$, *des sous-espaces vectoriels supplémentaires de* E.

*Une application linéaire de* E *dans* F *est caractérisée par ses restrictions aux sous-espaces* $E_1, \ldots, E_r$*. Plus précisément, l'application*

$$\mathbf{L}(E, F) \longrightarrow \prod_{i=1}^{r} \mathbf{L}(E_i, F), f \longmapsto (f|_{E_i})_{i=1}^{r}$$

*est bijective (c'est même un isomorphisme).*

PROPOSITION 5.11 (REGROUPEMENT DE BASES) *Pour tout* $i \in [\![1, r]\!]$*, soit* $\underline{e_i}$ *une base du sous-espace vectoriel* $F_i$ *de* E*.*
*Les sous-espaces vectoriels* $F_1, \ldots, F_r$ *sont supplémentaires dans* E *si, et seulement si, la famille obtenue par concaténation (regroupement) des familles* $\underline{e_i}$*,* $1 \leqslant i \leqslant r$*, notée abusivement* $(\underline{e_1}, \ldots, \underline{e_r})$*, est une base de* E*.*
*Une telle base est dite* ***adaptée*** *à la décomposition* $E = \bigoplus_i F_i$*.*

THÉORÈME 5.12 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* F *un sous-espace de* E*.*
*Le sous-espace* F *admet un supplémentaire dans* E *et tout supplémentaire de* F *dans* E *est de dimension* $\dim E - \dim F$.

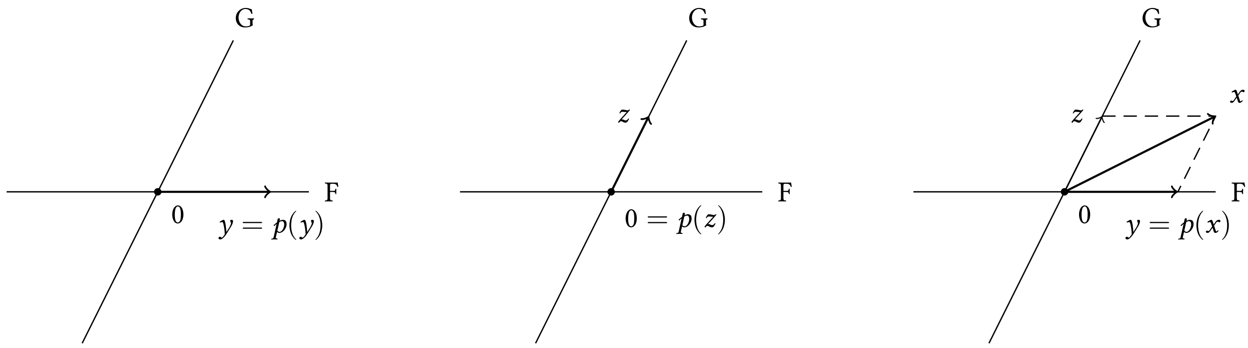
### *5.3 Projecteurs*

Dans cette section, F et G désignent deux sous-espaces vectoriels *supplémentaires* d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E donné.

DÉFINITION 5.13 *On appelle* ***projection*** *sur* F *parallèlement à* G *l'unique endomorphisme* $p$ *de* E *tel que :*

$$\forall x \in F, \quad p(x) = x \qquad \textit{et} \qquad \forall x \in G, \quad p(x) = 0.$$

*Remarque 5.14* Cette définition est correcte car F et G sont supplémentaires dans E.
L'image par cette projection d'un vecteur $x \in E$ se décomposant sous la forme $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times G$ est donc $p(x) = y$.




PROPOSITION 5.15 *Soit* $p$ *la projection sur* F *parallèlement à* G*. On a :*
*(i)* $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = F$ *;*
*(ii)* $\mathrm{Ker}\, p = G$ *;*
*(iii)* $p \circ p = p$*.*

*Remarque 5.16* Si $p$ est la projection sur F parallèlement à G, alors $q = \mathrm{id}_E - p$ est la projection sur G parallèlement à F. En effet, $q$ est un endomorphisme de E dont la restriction à F est nulle et la restriction à G est $x \longmapsto x$.
On a les relations $p + q = \mathrm{id}_E$, $q \circ q = q$ et $p \circ q = q \circ p = 0$.
On dit que $p$ et $q$ sont les projections associées à la décomposition $E = F \oplus G$ : ils fournissent les composantes $p(x)$ et $q(x)$ de tout vecteur $x$ respectivement sur F et G.

DÉFINITION 5.17 *On appelle* ***projecteur*** *de* E *tout endomorphisme* $p$ *de* E *tel que* $p \circ p = p$*.*

*Remarque 5.18* La projection sur F parallèlement à G est un projecteur de E. Réciproquement, on dispose du résultat suivant.

PROPOSITION 5.19 *Soit $p$ un projecteur de* E.
*(i) Les sous-espaces* $\operatorname{Ker} p$ *et* $\operatorname{Im} p$ *sont supplémentaires dans* E *;*
*(ii) $p$ est la projection sur* $\operatorname{Im} p$ *parallèlement à* $\operatorname{Ker} p$ *;*
*(iii)* $\operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_\mathrm{E}) = \operatorname{Im} p$*.*

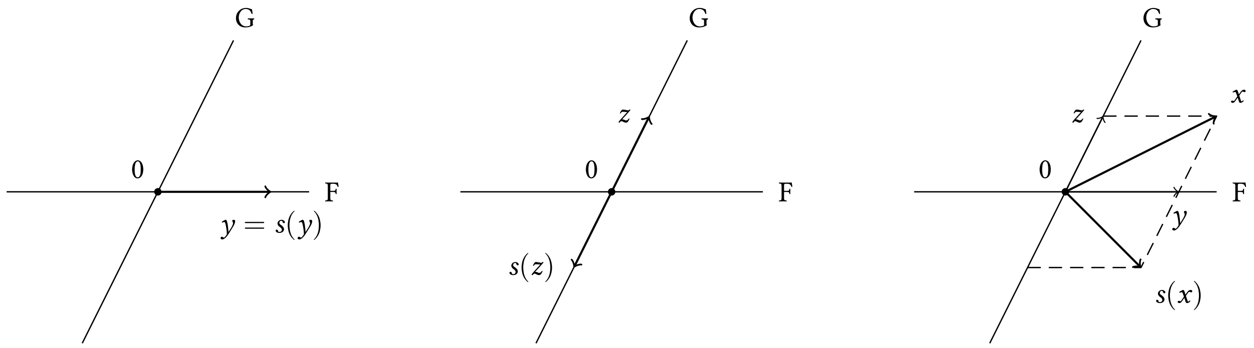
### *5.4 Symétries*

Dans cette section, F et G désignent deux sous-espaces vectoriels *supplémentaires* d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E donné.

DÉFINITION 5.20 *On appelle* ***symétrie*** *par rapport à* F *parallèlement à* G *l'unique endomorphisme $s$ de* E *tel que :*

$$\forall x \in \mathrm{F}, \quad s(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathrm{G}, \quad s(x) = -x.$$

*Remarque 5.21* L'image par cette symétrie d'un vecteur $x \in \mathrm{E}$ se décomposant sous la forme $x = y + z$ avec $(y, z) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$ est donc $s(x) = y - z$.




PROPOSITION 5.22 *Soit $s$ la symétrie par rapport à* F *parallèlement à* G. *On a :*
*(i)* $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_\mathrm{E}) = \mathrm{F}$ *;*
*(ii)* $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_\mathrm{E}) = \mathrm{G}$ *;*
*(iii)* $s \circ s = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.

*Remarque 5.23* Soit $p$ le projecteur sur F parallèlement à G, $q$ le projecteur sur G parallèlement à F et $s$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G. On a les relations $s = p - q = 2p - \mathrm{id}_\mathrm{E} = \mathrm{id}_\mathrm{E} - 2q$.

DÉFINITION 5.24 *On appelle* ***involution linéaire*** *de* E *tout endomorphisme $s$ de* E *tel que* $s \circ s = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.

PROPOSITION 5.25 *Soit $s$ une involution linéaire de* E.
*(i) Les sous-espaces* $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ *et* $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$ *sont supplémentaires dans* E *;*
*(ii) $s$ est la symétrie par rapport à* $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ *parallèlement à* $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$.

*Exemple 5.26* L'application $\mathrm{T} : \mathrm{A} \longmapsto {}^t\mathrm{A}$ est une involution linéaire de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$. Puisque $\operatorname{Ker}(\mathrm{T} - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ est le sous-espace $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et $\operatorname{Ker}(\mathrm{T} + \mathrm{id}_\mathrm{E})$ celui $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques, on retrouve la décomposition $\mathbf{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

### *5.5 Hyperplans et formes linéaires*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

DÉFINITION 5.27 *On appelle* ***forme linéaire*** *sur* E *toute application linéaire de* E *dans* $\mathbb{K}$.

*Exemples 5.28* • L'application $\mathrm{tr} : \mathrm{A} \longmapsto \mathrm{tr}\,\mathrm{A}$ est une forme linéaire sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

- L'application $f \longmapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur l'espace des fonctions continues sur un segment $[a, b]$ donné de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- L'application
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \lim_{n\to\infty} u_n$$
est une forme linéaire sur le sous-espace de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ formé par les suites convergentes.

Définition 5.29 *On appelle* ***hyperplan*** *de* E *tout sous-espace vectoriel de* E *admettant une droite vectorielle pour supplémentaire.*

Proposition 5.30 *Si* E *est de dimension finie n, un sous-espace vectoriel* H *en est un hyperplan si, et seulement si, il est de dimension* $\dim \mathrm{H} = n - 1$.

Théorème 5.31 *Une partie* H *de* E *en est un hyperplan si, et seulement si,* H *est le noyau d'une forme linéaire* $\varphi$ *non nulle. Une telle forme linéaire est unique à multiplication près par un scalaire non nul.*
*L'égalité* $\varphi(x) = 0$ *est alors appelée une* ***équation*** *de* H.

*Exemples 5.32* • L'ensemble $\mathrm{H}_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 : 3x + y - 7t = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}^4$.

- L'ensemble
$$\mathrm{H}_2 = \Big\{\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) : \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j} = 0\Big\}$$
est un hyperplan de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.
- L'ensemble $\mathrm{H}_3 = \{\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] : 3\mathrm{P}''(1) - 2\mathrm{P}'(2) + \mathrm{P}(3) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

*Remarque 5.33* Il résulte de la démonstration du théorème 5.31 qu'étant donné un hyperplan H de E, tout élément $a \notin \mathrm{H}$ engendre une droite supplémentaire de H. Comme le résultat n'est pas explicitement au programme, il convient de savoir le redémontrer rapidement (via l'introduction d'une équation $\varphi(x) = 0$).

On suppose à présent que E est de dimension finie $p \geqslant 1$ rapporté à une base $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$.
Pour une forme linéaire $\varphi$ sur E donnée, on note $a_j = \varphi(e_j) \in \mathbb{K}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. Pour un vecteur $x \in \mathrm{E}$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_p)$ dans la base $\underline{e}$, on a alors :
$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{p} a_j x_j = a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p.$$
D'après le théorème 5.31, les hyperplans de E sont donc les parties H de E formées des vecteurs de E dont les coordonnées $(x_1, \ldots, x_p)$ dans la base $\underline{e}$ vérifient une équation du type
$$a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p = 0,$$
$a_1, \ldots, a_p$ étant des scalaires non tous nuls fixés.