Chapitre 2 :

SÉRIES

1. Définition et premières propriétés

1.1 Définition

Dans ce chapitre, à partir d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée, on mène l'étude conjointe des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Afin de distinguer cette étude de celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que l'on étudie la **série** de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, que l'on note $\sum u_n$ ou $\sum_{n\geqslant 0} u_n$. La suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **suite des sommes partielles** de la série $\sum u_n$.

Définition 1.1 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.*

- *On dit que la série $\sum u_n$ est **convergente** si la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est convergente. On dit dans le cas contraire que la série $\sum u_n$ est **divergente**.*
  *Le caractère convergent ou divergent d'une série constitue sa **nature**.*
- *On appelle **somme** de la série $\sum u_n$, lorsqu'elle est convergente, et on note $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, la limite de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Remarque 1.2 On évitera soigneusement de confondre $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ou $\sum u_n$, notations désignant la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, avec $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ qui représente un réel lorsque la série $\sum u_n$ converge.

1.2 Séries convergentes

Proposition 1.3 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*
Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. La réciproque est fausse.

Remarques 1.4
- On utilise en pratique ce résultat pour mettre en évidence la divergence de certaines séries. Une série dont le terme général ne converge pas vers 0 est dite **grossièrement divergente** ; une telle série est divergente par contraposition de la proposition précédente.
- La réciproque est fausse : il existe des séries divergentes dont le terme général converge vers 0. Il en va ainsi de la série harmonique $\sum 1/n$.

Proposition 1.5 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles différant seulement par un nombre fini de termes.*
Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature : elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Définition 1.6 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $p \in \mathbb{N}$.*
*Si la série $\sum u_n$ converge, on définit son **reste** d'ordre p par la formule $\mathrm{R}_p = \sum\limits_{n=p+1}^{\infty} u_n$.*

Remarques 1.7 Soient $\sum u_n$ une série convergente, S sa somme et $(\mathrm{S}_p)_{p\in\mathbb{N}}$, $(\mathrm{R}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ les suites de ses sommes partielles et de ses restes.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la somme de la série $\sum u_n$ est la somme de la somme partielle d'ordre p et du reste d'ordre p :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{p} u_n + \sum_{n=p+1}^{\infty} u_n = \mathrm{S}_p + \mathrm{R}_p.$$

- La suite $(\mathrm{R}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ mesure donc la vitesse à laquelle la série $\sum u_n$ converge vers sa somme : étant donné $\varepsilon > 0$, la somme partielle S_p d'ordre p est une valeur approchée de S à ε près si, et seulement si, $|\mathrm{R}_p| \leqslant \varepsilon$. Cette inégalité sera réalisée pour tout p suffisamment grand d'après le résultat suivant :

Proposition 1.8 *Soient $\sum u_n$ une série convergente et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ son reste d'ordre n. La suite $(\mathrm{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

1.3 Suites et séries

Par définition, on détermine la nature d'une série en étudiant celle de la suite de ses sommes partielles. En pratique, néanmoins, il est en général difficile de calculer ces sommes partielles et l'on a recours à d'autres techniques. On regroupe dans ce paragraphe les cas typiques dans lesquels l'étude est possible par le calcul direct des sommes partielles.

Proposition 1.9 *Soit $q \in \mathbb{R}$.*
*La **série géométrique** $\sum q^n$ converge si, et seulement si, $|q| < 1$. Dans ces conditions,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

et plus généralement :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=p}^{\infty} q^n = \frac{q^p}{1-q}.$$

Théorème 1.10 (Formule du binôme négatif) *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}$.*
Si $|x| < 1$ alors la série ci-dessous converge et l'on a :

$$\sum_{n=r}^{\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = \frac{1}{r!} \sum_{n=r}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1)x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

Remarque 1.11 On notera que le résultat précédent signifie que l'on peut dériver *terme à terme* la formule donnant la somme d'une série géométrique.
C'est un cas particulier : rien ne garantit en général qu'une série de fonctions puisse être dérivée terme à terme !

Exemple 1.12 La **série harmonique alternée** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Théorème 1.13 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*
*La **série téléscopique** $\sum x_{n+1} - x_n$ converge si, et seulement si, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et dans ce cas :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} - x_n = \lim_{n\to\infty} x_n - x_0.$$

Exemple 1.14 Convergence et somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

1.4 Théorèmes opératoires

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(\lambda u_n + v_n)$ converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

- Si $\sum u_n$ converge et si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.
- On ne peut pas prévoir a priori la nature de la somme de deux séries divergentes.

1.5 Séries absolument convergentes

Définition 1.15 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*
*On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ est convergente.*

THÉORÈME 1.16 *Toute série absolument convergente est convergente. La réciproque est fausse.*

Remarque 1.17 Ce théorème est fondamental. Il permet de ramener, dans certains cas, l'étude de la nature d'une série réelle à celle de la nature d'une série auxiliaire à termes positifs, pour laquelle on va développer des critères spécifiques et performants dans le paragraphe suivant.

PROPOSITION 1.18 *Soit* $\sum u_n$ *une série absolument convergente.*
Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$*, on a :*

$$\left| \sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} |u_n| \, .$$

2. Séries à termes positifs

La nature d'une série étant indépendante de ses premiers termes, les résultats de ce paragraphe, établis pour des séries à termes réels positifs, se généralisent aux séries à termes réels positifs à partir d'un certain rang.
De même, une série et son opposé ayant même nature, les résultats que l'on va établir peuvent être généralisés aux séries à termes réels de signe fixe à partir d'un certain rang.

2.1 Lemme fondamental et séries de référence

LEMME 2.1 *Soit* (u_n) *une suite à termes réels positifs.*
La série $\sum u_n$ *est convergente si, et seulement si, la suite* $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de ses sommes partielles est majorée.*
Dans ces conditions, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{S}_n.$$

PROPOSITION 2.2 *Pour* $\alpha \in \mathbb{R}$*, la série de Riemann* $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ *est convergente si, et seulement si,* $\alpha > 1$.

2.2 Théorème de comparaison des séries à termes réels positifs

THÉORÈME 2.3 (COMPARAISON DES SÉRIES À TERMES RÉELS POSITIFS) *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites à termes réels positifs telles que* $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
(i) Si la série $\sum v_n$ *converge, alors la série* $\sum u_n$ *converge, et dans ce cas* $0 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.
(ii) Si la série $\sum u_n$ *diverge, alors la série* $\sum v_n$ *diverge.*

Exemple 2.4 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes réels positifs. De l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{u_n + v_n}{2},$$

on déduit, par application du théorème de comparaison, la convergence de la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$.

THÉORÈME 2.5 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites à termes réels positifs telles que* $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ *(par exemple, telles que* $u_n = o(v_n)$*).*
(i) Si la série $\sum v_n$ *converge, alors la série* $\sum u_n$ *converge ;*
(ii) Si la série $\sum u_n$ *diverge, alors la série* $\sum v_n$ *diverge.*

THÉORÈME 2.6 (RÈGLE DES ÉQUIVALENTS) *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites à termes réels positifs telles que* $u_n \sim v_n$.
Les séries $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*

Remarque 2.7 Étant données deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels, il suffit, pour appliquer ce théorème, de s'assurer que l'une des deux suites seulement est à termes positifs ; l'autre est alors automatiquement à termes positifs à partir d'un certain rang.
On verra par contre plus tard que le résultat ne se généralise pas aux suites qui ne sont pas de signe constant à partir d'un certain rang.

Exemple 2.8 Nature des séries de termes généraux $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ et $\dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$.

Le résultat suivant n'est pas au programme ; il est établi à titre d'exemple. Néanmoins, il est bon de le connaître, ainsi que sa démonstration, qui fait souvent l'objet d'une question en début d'exercice ou de problème.

PROPOSITION 2.9 (FORMULE SOMMATOIRE D'EULER) *Il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1), \qquad n \to \infty.$$

La constante γ est appelée constante d'Euler et vaut environ 0,577. On peut vérifier que $\gamma \in [0,1]$ facilement.

2.3 Comparaison aux séries de référence

Les deux résultats présentés dans cette section sont hors-programme. Cependant ils sont très utiles, la méthode est donc à retenir et le raisonnement doit pouvoir être présenté rapidement.

PROPOSITION 2.10 (COMPARAISON AUX SÉRIES DE RIEMANN) *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels positifs et $\alpha \geqslant 1$. On suppose que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in [0,+\infty]$.*

(i) Si $\alpha > 1$ et $\ell < +\infty$ (i.e. ℓ est finie), alors $u_n = \mathcal{O}(1/n^\alpha)$ et la série $\sum u_n$ converge par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum 1/n^\alpha$.

(ii) Si $\alpha = 1$ et $\ell > 0$ (éventuellement $\ell = +\infty$), alors $1/n = \mathcal{O}(u_n)$ et la série $\sum u_n$ diverge par comparaison à la série harmonique divergente.

Exemple 2.11 La série de Bertrand

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$). Le cas $\alpha = 1$ est plus délicat et sera traité plus tard par comparaison série-intégrale.

PROPOSITION 2.12 (COMPARAISON À UNE SÉRIE GÉOMÉTRIQUE, OU RÈGLE DE D'ALEMBERT) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels strictement positifs telle que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell \in [0,+\infty].$$

(i) Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ est convergente ;
(ii) Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente ;
(iii) Si $\ell = 1$, on ne peut rien affirmer a priori quant à la nature de la série $\sum u_n$, on parle du cas douteux de la règle de d'Alembert.

Remarque 2.13 L'idée de la démonstration est d'utiliser l'hypothèse pour justifier une domination du type $u_n = \mathcal{O}(k^n)$ avec $0 < k < 1$ dans le cas (i) ou une divergence grossière dans le cas (ii).

Exemple 2.14 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ est convergente.

3. Séries semi-convergentes

Définition 3.1 *Une série réelle $\sum u_n$ est dite **semi-convergente** si elle est convergente mais non absolument convergente.*

Le résultat ci-dessous est hors-programme. La méthode est néanmoins classique et doit être connue.

Théorème 3.2 (Critère spécial aux séries alternées) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.*
Si :
(i) la série est alternée *: $(-1)^n u_n$ est de signe indépendant de n,*
(ii) la suite (u_n) converge vers 0,
(iii) la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
alors les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc convergent vers la même limites, d'où l'on déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. La série $\sum u_n$ est donc convergente.

Exemple 3.3 Pour tout $\alpha > 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente d'après le critère précédent.

Remarque 3.4 Les théorèmes de comparaison, des équivalents, que l'on a établis pour les séries à termes réels de signe constant à partir d'un certain rang, ne s'étendent pas aux séries à termes réels de signe quelconque.
Par exemple, la série
$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$$
est divergente comme somme de la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n/\sqrt{n}$, dont on vient de voir qu'elle converge, et de la série harmonique, divergente, et pourtant on a l'équivalent :
$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\sim\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\qquad n\to\infty.$$

Exemple 3.5 Nature de la série $\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

4. Plan d'étude

Pour étudier la nature d'une série numérique $\sum u_n$, on peut suivre le plan d'étude suivant :

1. Si la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
2. Étude de la convergence absolue de $\sum u_n$ (ce qui revient à étudier $\sum u_n$ si celle-ci est à termes réels positifs ou plus généralement d'un signe constant). Quitte à remplacer u_n par $|u_n|$, on peut supposer $u_n \geqslant 0$ dans la suite de ce point du plan.
   - **a.** Rechercher un équivalent simple $u_n \sim v_n$ permet de ramener l'étude la série $\sum u_n$ à celle de la série plus simple $\sum v_n$.
   - **b.** Si l'expression de u_n fait apparaître le terme général w_n d'une série de référence, on peut essayer de se placer en situation d'appliquer les théorèmes généraux de comparaison : $u_n = \mathcal{O}(w_n)$ ou $w_n = \mathcal{O}(u_n)$ ou même $u_n \leqslant w_n$ ou $w_n \leqslant u_n$.
   - **c.** On peut tenter une comparaison aux séries de Riemann, notamment si on a écrit u_n sous forme exponentielle.
   - **d.** Si l'expression de u_n est à base de produits, puissances ou factorielles, on peut essayer d'appliquer la règle de d'Alembert.

e. Enfin, si le terme général s'écrit sous la forme $u_n = f(n)$ où $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, positive et décroissante, le principe de comparaison série-intégrale assure que la série $\sum u_n$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\int_a^{\to +\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ (à laquelle on pourra appliquer les critères spécifiques aux intégrales : calcul de primitive, changement de variable ou intégration par parties). Cf. chapitre sur les intégrales généralisées.

3. Lorsque la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente, la situation est plus délicate.

a. On peut essayer de vérifier les hypothèses du critère spécial si la série est alternée, mais il n'est pas toujours aisé (voire possible !) de vérifier la décroissance de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. On peut appliquer la méthode d'éclatement qui consiste à écrire, par exemple grâce à un développement asymptotique, le terme général u_n comme somme de plusieurs termes plus simples et à conclure en s'appuyant sur les théorèmes opératoires.

5. Questions de commutativité et d'associativité

Si naturelle que soit la définition de la somme d'une série convergente, il ne faut pas perdre de vue qu'il s'agit avant tout d'une limite, ce qui transporte le problème du champ de l'algèbre (dont relèvent les sommes partielles) à celui de l'analyse. L'objet de ce paragraphe est de mettre en évidence que certaines propriétés algébriques, usuelles pour les sommes finies, ne résistent pas à ce passage à la limite et d'inciter à la prudence lors de la manipulation des sommes de séries.

5.1 Effets d'un réarrangement des termes

Le problème se pose dans les termes suivants : on se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on souhaite étudier l'effet d'un réarrangement des termes sur la nature de la série $\sum u_n$. Réarranger les termes de la suite (u_n), c'est construire une nouvelle suite (v_n) dont les termes sont ceux de (u_n) considérés dans un ordre différent ; cela revient à choisir l'indice $\sigma(0)$ du premier terme $v_0 = u_{\sigma(0)}$, celui $\sigma(1)$ du second terme $v_1 = u_{\sigma(1)}$, etc. de façon à ce que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit pris une et une seule fois. La condition imposée signifie que σ est bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$; on parle de *permutation* de $\mathbb{N}$.
Avec la terminologie précédente, le problème s'énonce ainsi : étant données une série $\sum u_n$ convergente et une permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est-elle convergente ? Si oui, a-t-elle la même somme que la série initiale ?
La réponse à chaque question peut être négative, comme on va le voir sur l'exemple de la série harmonique alternée, de terme général $u_n = (-1)^{n-1}/n$, $n \geqslant 1$, convergente de somme $\ln 2$ comme on l'a vu dans l'exemple 1.12.

Exemple 5.1 — Un réarrangement des termes peut modifier la valeur de la somme.
Soit $\sum u_n$ la série harmonique alternée, que l'on peut représenter sous forme « déployée »

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots,$$

dont on va réordonner les termes de la façon suivante. On considère successivement et dans l'ordre un terme d'indice impair puis deux termes d'indices pairs :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{2n+1} + \cdots,$$

ce qui revient à considérer la permutation σ de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$ définie par $\sigma(3n-2) = 2n-1$, $\sigma(3n-1) = 4n-2$ et $\sigma(3n) = 4n$ pour tout $n \geqslant 1$. Soit $\sum v_n = \sum u_{\sigma(n)}$ la série obtenue après modification de l'ordre des termes, que l'on va étudier en regroupant ses termes trois par trois.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad w_n = v_{3n-2} + v_{3n-1} + v_{3n} = \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2}\right) - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right),$$

si bien que

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} W = \frac{\ln 2}{2}.$$

Si (V_n) désigne la suite des sommes partielles de la série $\sum v_n$, on a alors :

$$V_{3n} = \sum_{k=1}^{3n} v_k = \sum_{k=1}^{n} w_k = W_n, \qquad V_{3n+1} = W_n + v_{3n+1} = W_n + o(1)$$

et

$$V_{3n+2} = W_n + v_{3n+1} + v_{3n+2} = W_n + o(1),$$

qui convergent donc toutes les trois vers W. Il en résulte que la suite (V_n) converge elle-même vers W, c'est-à-dire que la série $\sum v_n$ converge vers

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \frac{\ln 2}{2}.$$

Sur ce premier exemple, le réarrangement des termes de la série convergente $\sum u_n$ a donc conduit à une série $\sum v_n$ convergente de somme distincte de celle de la série initiale.

Exemple 5.2 — Un réarrangement des termes peut rendre la série divergente.
Soit à nouveau $\sum u_n$ la série harmonique alternée, à partir de laquelle on construit une série $\sum v_n$ par réarrangement des termes en procédant comme suit. On pioche alternativement des termes dans l'une ou l'autre des suites $(u_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ par ordre d'indices croissants en itérant le processus suivant : à l'étape $k \geqslant 1$ (les étapes précédentes [1] ayant conduit au choix des p_k premiers termes $v_1, v_2, \dots, v_{p_k}$), on choisit un terme v_{p_k+1} (négatif) dans la suite (u_{2n}), après quoi on choisit autant de termes $v_{p_k+2}, v_{p_k+3}, \dots, v_{p_{k+1}}$ (positifs) que nécessaire dans la suite (u_{2n-1}) pour que

$$\sum_{j=1}^{p_{k+1}} v_j \geqslant k, \tag{5.1}$$

ce qui est rendu possible par la divergence de la série à termes réels positifs $\sum u_{2n-1} = \sum 1/(2n-1)$.
Les premiers termes seront donc :

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}_{\geqslant 1} - \frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{69}}_{\geqslant 2} - \frac{1}{6}+\frac{1}{71}+\frac{1}{73}+\cdots+\frac{1}{709}}_{\geqslant 3} + \cdots$$

Ce procédé relève bien du cadre général exposé au début du paragraphe puisque chaque terme de la suite (u_n) est ainsi retenu une et une seule fois pour figurer dans la suite (v_n). Par ailleurs, si (S_n) désigne la suite des sommes partielles de la série $\sum v_n$, alors la condition (5.1) montre que sa sous-suite $(S_{p_{k+1}})_{k\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$. Dans ces conditions, la suite (S_n) est elle aussi divergente.
Sur ce second exemple, le réarrangement des termes de la série convergente $\sum u_n$ a donc conduit à une série $\sum v_n$ divergente.

5.2 Effet d'un groupement de termes

À partir d'une série $\sum u_n$, on construit une série $\sum v_n$ de terme général

$$v_n = \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} u_k = u_{p_n} + u_{p_n+1} + \cdots + u_{p_{n+1}-1}$$

où (p_n) est une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $p_0 = 0$.
On montre facilement que la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum v_n$, avec égalité des sommes ; en effet, la suite des sommes partielles de la seconde est extraite de la suite des sommes partielles de la première.

1. Il n'y a pas d'étape avant la première, autrement dit $p_1 = 0$.

Mais la réciproque est fausse : il se peut que $\sum v_n$ converge alors que $\sum u_n$ diverge. Un exemple très simple est donné par $u_n = (-1)^n$ et $v_n = u_{2n} + u_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5.3 Séries commutativement convergentes

Pour combler les lacunes précédentes, on introduit la notion de convergence commutative :

DÉFINITION 5.3 *Une série $\sum u_n$ est dite **commutativement convergente** s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge vers ℓ.*

On admet la caractérisation suivante :

THÉORÈME 5.4 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*
La série $\sum u_n$ est commutativement convergente si, et seulement si, elle est absolument convergente.

Remarque 5.5 Au contraire, si $\sum u_n$ est une série réelle semi-convergente (i.e. convergente mais non absolument convergente), on dispose du théorème de Riemann : quelque soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ pour laquelle la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge vers ℓ...

5.4 Familles sommables sur un ensemble dénombrable

DÉFINITION 5.6 *(i) Un ensemble I est dit **dénombrable** s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur I.*
(ii) Un ensemble est dit au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.
(iii) Une famille réelle $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une application $\mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i \longmapsto u(i) = u_i$. Elle est dite (au plus) dénombrable lorsque l'ensemble d'indices I est (au plus) dénombrable.

Intuitivement, un ensemble au plus dénombrable est un ensemble dont on peut numéroter les éléments. On s'interroge à présent sur la possibilité de sommer les réels d'une famille dénombrable $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Comme on l'a vu plus haut, la question de l'*ordre de sommation* est cruciale.

DÉFINITION 5.7 *Soit $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille réelle dénombrable.*
*On dit que la famille $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est **sommable** s'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{I}$ telle que la série $\sum u_{f(n)}$ soit commutativement convergente.*
*On appelle alors **somme** de la famille $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$, et l'on note $\sum\limits_{i\in\mathrm{I}} u_i$, le réel :*

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i = \sum_{n=0}^{\infty} u_{f(n)}.$$

Remarque 5.8 On dit parfois, par abus de langage, que la série $\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i$ converge absolument pour signifier que la famille $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable.

Remarque 5.9 D'après les sections précédentes, cette définition ne dépend pas du choix de f. En effet, si $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{I}$ est une autre bijection, alors $u_{g(n)} = u_{f(\sigma(n))}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $\sigma = f^{-1} \circ g$ est une permutation de $\mathbb{N}$.

5.5 Sommation par paquets

La théorie des familles sommables offre le théorème de sommation par paquets suivant, que l'on admettra :

THÉORÈME 5.10 *Soient I un ensemble dénombrable et $(\mathrm{I}_k)_{k\in\mathrm{K}}$ une famille de parties de I deux-à-deux disjointes et recouvrant I : $\bigsqcup_{k\in\mathrm{K}} \mathrm{I}_k = \mathrm{I}$. Soit $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de réels.*
(i) Si la série $\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i$ est absolument convergente de somme S, alors la série $\sum_{i\in\mathrm{I}_k} u_i$ est absolument convergente de somme s_k pour tout $k \in \mathrm{K}$ et la série $\sum_{k\in\mathrm{K}} s_k$ est absolument convergente de somme S :

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i = \sum_{k\in\mathrm{K}} \Big(\sum_{i\in\mathrm{I}_k} u_i \Big).$$

(ii) La réciproque est vraie pour une famille $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de réels positifs.

(iii) La série $\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i$ est absolument convergente si, et seulement si, la série $\sum_{i\in\mathrm{I}_k} u_i$ est absolument convergente pour tout $k \in \mathrm{K}$ et la série $\sum_{k\in\mathrm{I}}\left(\sum_{i\in\mathrm{I}_k} |u_i|\right)$ est (absolument) convergente.

6. Séries doubles

Les résultats de ce paragraphe figurent au programme mais doivent être rappelés par tout exercice ou problème y faisant appel. Ils découlent des résultats du paragraphe précédent.

On admet que si I_1 et I_2 sont des ensembles dénombrables, alors $\mathrm{I}_1 \times \mathrm{I}_2$ est encore dénombrable. En particulier, $\mathbb{N}^2$ est un ensemble dénombrable.

Théorème 6.1 (Fubini) *Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de réels.*
La famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si, l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :
(i) pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_j |u_{i,j}|$ est convergente de somme a_i et la série $\sum_i a_i$ est convergente ;
(ii) pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\sum_i |u_{i,j}|$ est convergente de somme b_j et la série $\sum_j b_j$ est convergente.
On dit dans ce cas que la série double $\sum_{i,j} u_{i,j}$ est absolument convergente, et l'on a alors :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_{i,j}\right).$$

Remarque 6.2 Dans le cas d'une série double de réels *positifs*, on parle de convergence plutôt que de convergence absolue.

Exemple 6.3 Convergence absolue et somme de la série double $\sum\limits_{i,j\geqslant 0} (-1)^{i+j}\dfrac{i^j}{i!j!}$.

Proposition 6.4 *Soient $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ et $(v_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ deux suites réelles doubles telles que $|v_{i,j}| \leqslant u_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.*
Si la série double $\sum_{i,j} u_{i,j}$ converge, alors la série double $\sum_{i,j} v_{i,j}$ converge absolument.

Exemple 6.5 Convergence de la série double $\sum\limits_{i,j\geqslant 0} \dfrac{1}{(i+j)!}$ par comparaison. Calcul de sa somme par sommation par paquets.