

Programme de colle : semaine 20
du 18 au 22 mars 2019

Endomorphismes et matrices symétriques

1. Endomorphismes et matrices symétriques
2. Application à l'étude du signe d'une forme quadratique
Formes quadratiques sur \mathbb{R}^n : définition, représentation matricielle. Forme polaire, matrice symétrique et endomorphisme symétrique associés à une forme quadratique. Inégalité $\alpha \|x\|^2 \leq q(x) \leq \beta \|x\|^2$ où α et β désignent les plus petite et grande valeur propre de la matrice symétrique associée à q , avec cas d'égalité. Étude du signe d'une forme quadratique en fonction des valeurs propres de la matrice symétrique associée, application à la caractérisation des formes bilinéaires positives et définies-positives.

Remarque. Les résultats concernant le signe d'une forme quadratique ne sont pas explicitement au programme et doivent être redémontrés en cas de besoin.

Fonctions de plusieurs variables : optimisation

1. Extremums locaux sur un ouvert
Point critique, condition nécessaire du premier ordre. Condition suffisante du second ordre : en un point critique, cas où la hessienne est définie-positve, définie-négative ou ne garde pas un signe constant, formulation en termes de valeurs propres. Pour une fonction de $n = 2$ variables en utilisant les notations de Monge, alternative sur le signe de $rt - s^2$ (pas explicitement au programme).
2. Extremums globaux
Sur un ouvert : formule de Taylor avec reste intégral, application au cas où la hessienne est positive en tout point d'un ouvert convexe (à redémontrer). Cas général : existence sur un fermé borné non vide, étude sur l'intérieur et sur le bord (notions introduites sur des exemples).