

Programme de colle : semaine 14
du 14 au 18 janvier 2019

Fonctions de plusieurs variables : introduction

Peu d'exercices traités en classe. Seuls les meilleurs étudiants qui le souhaiteraient seront interrogés sur ce chapitre, qui ne constitue pas un objectif principal du programme.

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur une partie de \mathbb{R}^n et à valeurs réelles.

1. Quelques parties convexes de \mathbb{R}^n
Droites affines. Hyperplans affines. Parties convexes.
2. Rudiments de topologie
Norme euclidienne. Distance euclidienne, boules ouvertes et fermées. Parties ouvertes et fermées. Parties bornées.
3. Graphe d'une fonction
Définition et exemples. Lignes de niveau d'une fonction.
4. Limites et continuité
Définition, lien limite-continuité, limite par encadrement. Convergence d'une suite vectorielle dans \mathbb{R}^n , caractérisation séquentielle de la continuité. Opérations sur les fonctions continues : opérations algébriques, composition, méthode pour démontrer l'absence de limite (trouver plusieurs chemins le long desquels la fonction a des limites distinctes). Continuité et fonctions partielles. Continuité et topologie : l'image réciproque d'un ouvert (resp. d'un fermé) par une fonction continue sur \mathbb{R}^n est ouverte (resp. fermée), une fonction continue sur une partie fermée, bornée et non vide est bornée et atteint ses bornes.

Lois continues classiques

1. Loi uniforme
Définition par la densité, fonction caractéristique, transformation affine. Moments.
2. Loi exponentielle
Définition par la densité, fonction caractéristique, transformation linéaire. Moments. Caractérisation par l'absence de mémoire.
3. Loi γ
Définition par la densité. Moments. Stabilité : somme de variables aléatoires X_i , $1 \leq i \leq n$, mutuellement indépendantes suivant des lois $\gamma(\nu_i)$ puis $\mathcal{E}(1)$.
4. Loi normale ou gaussienne
Définition par la densité, notation $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ pour une espérance m et une variance σ^2 , transformation affine. Étude de la densité et de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Moments. Stabilité : somme de variables aléatoires X_i , $1 \leq i \leq n$, mutuellement indépendantes suivant des lois $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$.

Remarque. Les lois Γ sont désormais hors-programme.

Espaces euclidiens

1. Bases orthonormales
Définition, expression du produit scalaire et de la norme en base orthonormale, coordonnées d'un vecteur en base orthonormale. Existence, matrice de passage entre deux bases orthonormales, matrices orthogonales. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

2. Supplémentaire orthogonal

Théorème fondamental : si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E , alors F et F^\perp sont supplémentaires dans E , $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ et $F^{\perp\perp} = F$. Théorème de la base orthonormale incomplète, orthogonal d'un hyperplan. Projecteurs orthogonaux : définition, caractérisation du projeté orthogonal, expression dans une base orthonormale $(v_i)_{i=1}^r$ du sous-espace sur lequel on projette, matrice en base orthonormale en fonction des colonnes de coordonnées des v_i .