ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles
Mathématiques

Programme de colle : semaine 12

du 17 au 21 décembre 2018

Produit scalaire et orthogonalité

1. Formes bilinéaires
   Définition. Représentation matricielle, expression dans une base, formule de changement de base. Formes bilinéaires symétriques (caractérisation matricielle), définies et définies-positives, inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Produits scalaires
   Définition. Exemples usuels : produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ (expressions matricielles pour les deux derniers), produit scalaire usuel sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$. Norme euclidienne associée à un produit scalaire : définition et propriétés, distance euclidienne, inégalité de Cauchy-Schwarz, identités remarquables, identités de polarisation et du parallélogramme.
3. Orthogonalité
   Vecteurs orthogonaux, famille orthogonale, toute famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre, théorème de Pythagore, vecteur normé ou unitaire, famille orthonormale. Vecteur orthogonal à un sous-espace, stabilité de l'orthogonalité à un vecteur par combinaison linéaire, orthogonal d'un sous-espace : c'est un sous-espace, exemples, propriétés, la condition $x \in \mathrm{F}^\perp$ équivaut à l'orthogonalité de x aux vecteurs d'une famille génératrice de F, la somme $\mathrm{F} + \mathrm{F}^\perp$ est directe, $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}^{\perp\perp}$. Sous-espaces orthogonaux, vérification sur les vecteurs de deux familles génératrices, une somme de sous-espaces deux-à-deux orthogonaux est directe.