

Programme de colle : semaine 8
du 19 au 23 novembre 2018

Intégrales généralisées

1. Rappels sur les intégrales définies (à travailler seul par les étudiants)
Rappel succinct de la définition, sommes de Riemann. Relation de Chasles, linéarité, positivité (avec cas d'égalité), croissance de l'intégrale, inégalité triangulaire intégrale. Primitives, différentes formes du théorème fondamental, intégration par parties, changement de variable.
2. Notion d'intégrale généralisée
Sur un intervalle semi-ouvert : définition, intégrales faussement généralisées, la nature de l'intégrale ne dépend que du comportement de la fonction au voisinage de la borne de généralisation, reste d'une intégrale généralisée convergente, convergence du reste vers 0, nature et calcul d'une intégrale grâce à une primitive. Exemples de références : intégrales de Riemann, $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$. Sur un intervalle ouvert. Sur un intervalle privé d'un nombre fini de points. Théorèmes opératoires.
3. Propriétés des intégrales généralisées convergentes
Linéarité. Relation de Chasles. Positivité et croissance (avec cas d'égalité).
4. Théorème de comparaison pour les fonctions positives
Lemme fondamental et théorème de comparaison. Déclinaisons du théorème de comparaison aux cas où $f = o(g)$ ou $f \sim g$ au voisinage d'une borne de généralisation. Comparaison aux intégrales de Riemann.
5. Intégrales absolument convergentes
Définition, la convergence absolue implique la convergence, inégalité triangulaire intégrale. Notion d'intégrale semi-convergente.
6. Outils de calcul intégral
Changement de variable dans une intégrale généralisée. Les intégrations par parties s'effectuent sur un segment.
7. Comparaison série-intégrale
Pour f continue, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$, la série $\sum f(n)$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t) dt$. Application à l'estimation de sommes.
8. Intégrales classiques
Intégrale de Gauss (valeur admise). Fonction Γ (domaine de définition, équation fonctionnelle, valeur sur les entiers et en $\frac{1}{2}$).

Diagonalisation

1. Diagonalisation naïve des matrices carrées et applications
Définition : une matrice carrée est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Définition des valeurs et colonnes propres. Méthode de diagonalisation effective : recherche d'une matrice inversible P dont les colonnes sont propres pour A . Méthode pratique de recherche des valeurs propres. Application au calcul des puissances d'une matrice carrée.
2. Sous-espaces stables par un endomorphisme
Sous-espaces stables, endomorphisme induit sur un sous-espace stable. Caractérisation matricielle. Cas de sous-espaces supplémentaires stables.

3. Éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice carrée

Éléments propres d'un endomorphisme. Éléments propres d'une matrice carrée ; valeurs propres d'une matrice triangulaire. Polynômes annulateurs, existence en dimension finie, toute valeur propre est racine d'un polynôme annulateur donné, réciproque fausse. La somme de plusieurs sous-espaces propres est directe, majoration du nombre de valeurs propres en dimension finie.