ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles
Mathématiques

Programme de colle : semaine 7

du 12 au 16 novembre 2018

Algèbre linéaire (révisions et compléments)

1. Espaces vectoriels
2. Calcul matriciel
3. Applications linéaires
4. Représentations matricielles
   Représentation matricielle d'un vecteur dans une base, d'une application linéaire dans des bases, matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires, d'une composée, d'un isomorphisme, isomorphisme entre $\mathbf{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Interprétation géométrique canonique des matrices. Matrices de passage, formules de changement de bases pour les vecteurs, pour les applications linéaires, pour les endomorphismes. Matrices semblables. Rang d'une matrice, caractérisations de l'inversibilité d'une matrice carrée.
5. Sous-espaces supplémentaires, projecteurs et symétries
   Famille finie de sous-espaces en somme directe. Sous-espaces supplémentaires, exemple des sous-espaces de matrices symétriques et antisymétriques, base adaptée à une famille de sous-espaces supplémentaires, existence et dimension d'un supplémentaire. Projecteur sur un sous-espace parallèlement à un supplémentaire, caractérisation des projecteurs parmi les endomorphismes. Symétrie par rapport à un sous-espace parallèlement à un supplémentaire, caractérisation des symétries parmi les endomorphismes. Formes linéaires, hyperplans (en dimension quelconque), caractérisation des hyperplans comme noyaux de formes linéaires non nulles, unicité de l'équation à multiplication près par un scalaire non nul, cas de la dimension finie.

Intégrales généralisées (révisions et compléments)

1. Rappels sur les intégrales définies (à travailler seul par les étudiants)
   Rappel succinct de la définition, sommes de Riemann. Relation de Chasles, linéarité, positivité (avec cas d'égalité), croissance de l'intégrale, inégalité triangulaire intégrale. Primitives, différentes formes du théorème fondamental, intégration par parties, changement de variable.
2. Notion d'intégrale généralisée
   Sur un intervalle semi-ouvert : définition, intégrales faussement généralisées, la nature de l'intégrale ne dépend que du comportement de la fonction au voisinage de la borne de généralisation, reste d'une intégrale généralisée convergente, convergence du reste vers 0, nature et calcul d'une intégrale grâce à une primitive. Exemples de références : intégrales de Riemann, $\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$. Sur un intervalle ouvert. Sur un intervalle privé d'un nombre fini de points. Théorèmes opératoires.
3. Propriétés des intégrales généralisées convergentes
   Linéarité. Relation de Chasles. Positivité et croissance (avec cas d'égalité).
4. Théorème de comparaison pour les fonctions positives
   Lemme fondamental et théorème de comparaison. Déclinaisons du théorème de comparaison aux cas où $f = o(g)$ ou $f \sim g$ au voisinage d'une borne de généralisation. Comparaison aux intégrales de Riemann.
5. Intégrales absolument convergentes
   Définition, la convergence absolue implique la convergence, inégalité triangulaire intégrale. Notion d'intégrale semi-convergente.

6. Outils de calcul intégral
   Changement de variable dans une intégrale généralisée. Les intégrations par parties s'effectuent sur un segment.
7. Comparaison série-intégrale *(à partir de jeudi)*
   Pour f continue, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$, la série $\sum f(n)$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Application à l'estimation de sommes.
8. Intégrales classiques
   Intégrale de Gauss (valeur établie en TD). Fonction Γ (domaine de définition, équation fonctionnelle, valeur sur les entiers et en $\frac{1}{2}$).