

# Suites et fonctions d'une variable

## Travaux dirigés

### THÈME 1 : DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DES SUITES ADJACENTES

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n - u_n = 0$ .

1. Montrer que la suite  $(v_n - u_n)$  est décroissante et en déduire que  $u_p \leq v_q$  pour tous  $p, q \in \mathbb{N}$ .
2. Justifier que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers une limite commune.

### THÈME 2 : THÉORÈME DES SEGMENTS EMBOÎTÉS ET APPLICATIONS

1. Démontrer le théorème des segments emboîtés qui s'énonce comme suit : Soit  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de segments emboîtés au sens où  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $b_n - a_n$  tend vers 0, alors  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$  se compose d'un unique réel.
2. *Application.* On souhaite démontrer par l'absurde que  $[0, 1]$  (donc a fortiori  $\mathbb{R}$ ) n'est pas dénombrable, i.e. qu'on ne peut pas en énumérer les éléments. On suppose donc l'existence d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  prenant toutes les valeurs de l'intervalle  $[0, 1]$ .  
Construire une suite  $(J_n)$  de segments emboîtés telle que  $u_n \notin J_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et obtenir une contradiction.

### THÈME 3 : SUITES RÉCURRENTES $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  non trivial de  $\mathbb{R}$ .

1. Soit  $J \subset I$  un intervalle que l'on suppose stable par  $f : f(J) \subset J$ , i.e.  $f(x) \in J$  pour tout  $x \in J$ .
  - a. Montrer que pour tout  $a \in J$ , il existe une unique suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_0 = a$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - b. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que s'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $u_N \in J$ , alors  $u_n \in J$  pour tout  $n \geq N$ .

Dans toute la suite, on suppose que l'intervalle  $I$  est stable par  $f$  et l'on considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2.
  - a. Montrer que si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $\ell \in I$ , alors  $\ell$  est un point fixe de  $f : f(\ell) = \ell$ .
  - b. Quelles sont les seules limites éventuelles de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?
  - c. Étudier la nature des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{1 - u_n}.$$

3.
  - a. Montrer que si  $f$  est croissante, alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone.
  - b. Étudier la nature des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  en fonction de  $u_0 \geq 0$ .
4.
  - a. Montrer que si  $f$  est décroissante, alors les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones de sens contraires.  
*Indication.* On pourra chercher une relation de récurrence pour chacune de ces suites.
  - b. Étudier la nature des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_{n+1} = \cos u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

5.
  - a. On suppose dans cette question que  $f$  est dérivable et qu'il existe  $k < 1$  tel que  $|f'(x)| \leq k$  pour tout  $x \in I$  (on dit que  $f$  est contractante).  
Montrer que si  $\ell$  est point fixe de  $f$ , alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leq k |u_n - \ell|$$

et en déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ .

5.
  - b. Retrouver la nature des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $u_{n+1} = \cos u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

6. On considère pour finir une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la donnée de son premier terme  $u_0 > 0$  et de la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{u_n}.$$

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$  pour tout  $x > 0$ .

- Justifier qu'il existe une unique limite finie  $\ell$  possible pour  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Justifier qu'il existe  $m > 1$  et  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$\forall x \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon] \subset \mathbb{R}_+^*, \quad |f'(x)| \geq m.$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle convergente ?

- Préciser le comportement des sous-suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .

#### THÈME 4 : DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un segment  $[a, b]$  ( $a < b$  réels). On souhaite démontrer que pour toute valeur  $\gamma$  comprise entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \gamma$ .

- Justifier qu'il suffit de traiter le cas  $\gamma = 0$ .

On suppose donc  $f(a)f(b) < 0$  et  $\gamma = 0$  dans la suite de l'exercice.

- Première méthode : démonstration par dichotomie*

- Construire un couple de suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  adjacentes telles que  $f(a_n)f(b_n) < 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Conclure.

- Deuxième méthode : utilisation d'une borne supérieure*

- Justifier l'existence de  $c = \inf\{x \in [a, b] : f(a)f(x) < 0\}$ .
- En raisonnant par l'absurde, justifier que  $f(a)f(c) \geq 0$ .
- Justifier l'existence d'une suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $[a, b]$  convergeant vers  $c$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(a)f(y_n) < 0$ . En déduire que  $f(a)f(c) \leq 0$ .
- Conclure.