

Travaux dirigés
 Suites et fonctions d'une variable
 ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles
 Année 2017/2018

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 1 / 1

T 3 Q 1.a

Thème 3

Question 1.a

Unicité. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites qui conviennent, on démontre que $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.
Existence. On démontre par récurrence que les n premiers termes de la suite sont bien définis et appartiennent à J pour tout $n \in \mathbb{N}$.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 2 / 1

T 3 Q 1.b

Thème 3

Question 1.b

Récurrence immédiate.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 3 / 1

T 3 Q 2.a

Thème 3

Question 2.a

Si (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$ par continuité de f sur I (donc en ℓ). Dans ce cas, on obtient $f(\ell) = \ell$ par passage à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 4 / 1

T 3 Q 2.b

Thème 3

Question 2.b

La limite d'une suite convergente d'éléments de I peut appartenir à I mais aussi être une borne de I . D'après la question précédente, les seules limites éventuelles de (u_n) sont donc les points fixes de f sur I et les bornes de I (on peut même préciser : celles qui n'appartiennent pas à I).
 On peut déterminer si la fonction f admet des points fixes, leur nombre et les estimer en étudiant la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 5 / 1

T 3 Q 2.c

Thème 3

Question 2.c

La fonction $f : x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ses variations sont résumées dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f	-1	0	1	$+\infty$	-1

On observe que $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ est une partie stable. La suite est donc bien définie si, et seulement si, $u_0 \notin \{-1, 0, 1\}$.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 6 / 1

T 3 Q 2.c

On observe sur le tableau de variations précédent que f n'admet aucun point fixe sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Les seules limites éventuelles sont donc $-\infty$, -1 , 0 , 1 et $+\infty$.

- f étant continue en -1 et 0 sans y admettre de point fixe, ces réels ne peuvent pas être limite de (u_n) .
- Si (u_n) tend vers $\pm\infty$, alors

$$u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1-u_n} \sim \frac{u_n}{-u_n} \rightarrow -1,$$
 ce qui est absurde. Ceci exclut donc que $\pm\infty$ soient limites.
- Enfin, si (u_n) tend vers 1 , alors

$$|u_{n+1}| = \left| \frac{1+u_n}{1-u_n} \right| \rightarrow +\infty,$$
 ce qui est également absurde et 1 ne peut donc pas non plus être limite.

En conclusion, la suite (u_n) n'admet pas de limite.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 7 / 1

T 3 Q 3.a

Thème 3

Question 3.a

Si f est croissante alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ est du signe de $u_{n+1} - u_n$. Ainsi la différence $u_{n+1} - u_n$ garde un signe constant et la suite (u_n) est monotone. Son sens de variation est donné par le signe de $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = g(u_0)$, si l'on définit la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 8 / 1

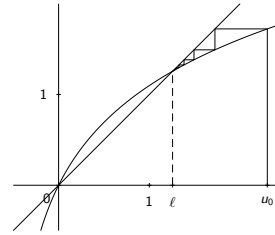
Thème 3

Question 3.b

La fonction $f : x \mapsto \ln(1 + 2x)$ est continue et croissante sur l'intervalle stable $[0, +\infty[$. La suite (u_n) est donc bien définie et monotone pour $u_0 \geq 0$. Les variations de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sont résumées dans le tableau ci-dessous :

x	0	$\frac{1}{2}$	α	$+\infty$
g	0	> 0	0	$-\infty$

La fonction f admet donc deux points fixes : 0 et α , sur $[0, +\infty[$. D'où trois limites possibles pour (u_n) : 0, α et $+\infty$.



Le sens de variation de (u_n) est donné par le signe de $g(u_0)$, ce qui amène à distinguer les cas suivants :

- si $u_0 = 0$, alors la suite est constante nulle.
- si $0 < u_0 \leq \alpha$, alors la suite (u_n) est croissante. Par ailleurs, son premier terme est dans l'intervalle stable $[0, \alpha]$, ce qui est donc aussi le cas de tous les autres termes. La suite (u_n) est ainsi croissante et majorée donc convergente. Les limites éventuelles 0 et $+\infty$ doivent être écartées. La suite (u_n) converge donc vers α .
- si $\alpha \leq u_0$, alors la suite (u_n) est décroissante, et par ailleurs minorée par α car à termes dans l'intervalle stable $[\alpha, +\infty[$. Elle est donc convergente vers la seule limite possible α .

Thème 3

Question 4.a

Les suites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$ sont récurrentes associées à la fonction $F = f \circ f$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = F(v_n)$$

et de même pour (w_n) . La fonction F étant croissante (comme composée de deux fonctions décroissantes), ces deux suites (v_n) et (w_n) sont monotones, de sens contraires car données respectivement par les signes de $v_1 - v_0$ et $w_1 - w_0 = f(v_1) - f(v_0)$, opposés puisque f est décroissante.

Thème 3

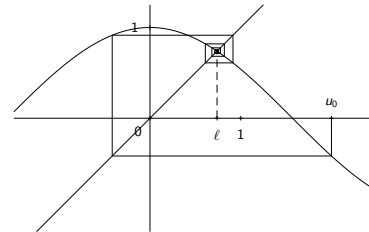
Question 4.b

L'intervalle \mathbb{R} est stable par $f = \cos$ mais la fonction f n'y est pas monotone... Cependant, $u_1 = \cos u_0 \in [-1, 1]$ puis $u_2 \in [0, 1]$ et, comme l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f , la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ prend ses termes dans l'intervalle stable $[0, 1]$ sur lequel f est décroissante. Les suites $(u_{2n})_{n \geq 1}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont donc monotones de sens contraires ; étant de plus toutes deux bornées, elles sont convergentes.

Par ailleurs, l'étude de la fonction $x \mapsto \cos x - x$ montre que la fonction f présente un unique point fixe α dans l'intervalle $[0, 1]$, qui constitue donc la seule limite possible pour (u_n) .

Mais les limites éventuelles des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont à rechercher parmi les points fixes de... $F = f \circ f$! Il est clair que α est point fixe de F et l'étude de $x \mapsto F(x) - x$ montre que c'est le seul sur $[0, 1]$.

Ainsi les deux suites extraites principales (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite α , ce qui entraîne la convergence de la suite complète (u_n) vers α .



Thème 3

Question 5.a

S'il existe $k \in [0, 1[$ tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$, alors l'inégalité des accroissements finis s'applique à la fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur I et assure que :

$$\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|.$$

En appliquant l'inégalité précédente à $x = \ell$ point fixe de f et $y = u_n$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k |u_n - \ell|.$$

Il en résulte par une récurrence immédiate que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

puisque $0 \leq k < 1$, d'où l'on déduit par encadrement que (u_n) converge vers ℓ .

Thème 3

Question 5.b

La fonction $f = \cos$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} avec $|f'(x)| = |\sin x| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais on ne peut trouver de majorant $k < 1$...

Néanmoins, comme on l'a vu dans la question 4.b., la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ stable, et l'on a :

$$\forall x \in [0, 1], |f'(x)| = \sin x \leq k = \sin 1 < 1.$$

On peut donc appliquer le résultat de la question a. : la suite (u_n) converge vers l'unique point fixe α de la fonction \cos sur $[0, 1]$, dont l'existence a été établie en 4.a..

On peut même ajouter grâce à cette méthode que $u_n = \alpha + \mathcal{O}(k^n)$.

T 3 Q 6.a

Thème 3

Question 6.a

La suite (u_n) est bien définie car l'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par la fonction $f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{x}$.

Les points fixes de f sont les points en lesquels la fonction $x > 0 \mapsto x^2 e^x$ prend la valeur 1. Or celle-ci est continue et strictement croissante, de limites 0 et $+\infty$ en 0 et $+\infty$. Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur lui-même et la fonction f présente donc un unique point fixe α .

La convergence de la suite (u_n) ne peut avoir lieu que vers 0 ou le seul point fixe α de f . Mais il est impossible que (u_n) tende vers 0, sans quoi

$$u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

ce qui est absurde.

La seule limite finie possible pour (u_n) est donc α .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 17 / 1

T 3 Q 6.b

Thème 3

Question 6.b

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ avec :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -\frac{(1+x)e^{-x}}{x^2}.$$

En particulier pour $x = \alpha$, on a $f'(\alpha) = -(1+\alpha)$ donc $|f'(\alpha)| > 1$. Étant donné $m \in]1, |f'(\alpha)|[$, la continuité de f' en α assure donc l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \cap \mathbb{R}_+^*, \quad |f'(x)| \geq m.$$

On peut considérer $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \subset \mathbb{R}_+^*$.

Il résulte alors du théorème des accroissements finis que :

$$\forall x, y \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon], \quad |f(y) - f(x)| \geq m|y - x|.$$

En effet, pour de tels réels x et y , il existe $z \in [x, y]$ tel que :

$$|f(y) - f(x)| = |f'(z)||y - z| \geq m|y - z|.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 18 / 1

T 3 Q 6.b

- Si $u_0 = \alpha$, alors la suite (u_n) est constante donc convergente de limite α .
- On suppose à présent $u_0 \neq \alpha$. On a alors $u_n \neq \alpha$ puisque f est strictement décroissante donc injective sur \mathbb{R}_+^* .

Si la suite (u_n) convergerait vers α , il existerait un entier N tel que $|u_n - \alpha| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. On aurait donc :

$$\forall n \geq N, \quad |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \geq m|u_n - \alpha|$$

et donc, par une récurrence immédiate,

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - \alpha| \geq m^{n-N}|u_N - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

ce qui serait contradictoire avec la convergence de (u_n) vers α . Ainsi la suite (u_n) ne peut converger vers α . Elle est donc divergente d'après la question a..

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 19 / 1

T 3 Q 6.c

Thème 3

Question 6.c

Puisque la fonction f est décroissante sur l'intervalle stable $]0, +\infty[$, les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires et admettent donc chacune une limite.

Un petit calcul algébrique montre que tout point fixe de $f \circ f$ est aussi point fixe de f . Ainsi α est le seul point fixe de $f \circ f$ et les seules limites possibles pour (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc 0, α et $+\infty$.

Or $|(f \circ f)'(\alpha)| = |f'(\alpha)|^2 > 1$ et le même raisonnement qu'en b. montre qu'à moins d'avoir $u_0 = \alpha$, aucune des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ne peut converger vers α . En conclusion, l'une des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) converge en décroissant vers 0 alors que l'autre diverge en croissant vers $+\infty$, en accord avec le diagramme page suivante.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 20 / 1

T 3 Q 6.c

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 21 / 1