Révisions
Feuille d'exercices

1 *ECRICOME 2007*

1. À l'aide de développements limités usuels que l'on rappellera clairement, montrer que :
$$\ln(2-\mathbf{e}^x) = -x - x^2 + o(x^2), \quad x \to 0.$$

2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :
$$v_n = \ln(2-\mathbf{e}^{1/n}), \quad \mathrm{V}_n = \sum_{k=2}^{n} v_k \quad \text{et} \quad u_n = \exp \mathrm{V}_n.$$

a. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.
b. Déterminer les limites des suites (V_n) et (u_n).

3. a. Montrer que :
$$\forall n \geqslant 2, \quad \ln(nu_n) = \sum_{k=2}^{n} \Big(\ln(2-\mathbf{e}^{1/k}) - \ln\Big(1-\frac{1}{k}\Big)\Big).$$

b. Déterminer un équivalent, lorsque $n \to \infty$, de
$$\ln(2-\mathbf{e}^{1/n}) - \ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big).$$

c. En déduire qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que $u_n \sim \kappa/n$ lorsque $n \to \infty$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

4. Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$.

2 *EMLYON 2002*

On admet que la suite de terme général
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$
converge vers une constante γ (appelée *constante d'Euler*) dont on va établir une expression intégrale.

1. a. Établir :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1+x \leqslant \mathbf{e}^x.$$

b. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $t \in [0,n]$, les inégalités suivantes :
$$\Big(1+\frac{t}{n}\Big)^n \leqslant \mathbf{e}^t \quad \text{et} \quad \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n \leqslant \mathbf{e}^{-t}$$
puis :
$$\Big(1-\frac{t^2}{n^2}\Big)^n \mathbf{e}^{-t} \leqslant \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n \leqslant \mathbf{e}^{-t}.$$

2. a. Établir :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1], \quad (1-x)^n + nx - 1 \geqslant 0.$$

b. En utilisant **1.b.** et **a.**, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0,n], \quad 0 \leqslant \mathbf{e}^{-t} - \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n \leqslant \frac{t^2}{n}\mathbf{e}^{-t}.$$

3. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de
$$\mathrm{I}_n = \int_0^n \frac{1}{t}\Big(\mathbf{e}^{-t} - \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n\Big)\,\mathrm{d}t.$$

b. Établir que I_n tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.

4. a. Établir :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^k \mathrm{d}t = n(a_n + \ln n).$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de
$$\mathrm{J}_n = \int_0^n \frac{1}{t}\Big(1 - \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n\Big)\,\mathrm{d}t$$
et montrer que $\mathrm{J}_n = a_n + \ln n$.

5. On note :
$$\mathrm{U} = \int_0^1 \frac{1-\mathbf{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

a. Justifier l'existence de U et V.
b. Démontrer que $\gamma = \mathrm{U} - \mathrm{V}$.

3 *ECRICOME 2010*

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère les intégrales :
$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n}-u^{2/n}}{1-u}\,\mathrm{d}u.$$

1. a. Vérifier que :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall t \in [0,1[, \quad \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}.$$
En déduire que :
$$\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

b. En utilisant le changement de variable $u = t^n$, établir que :
$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}.$$

2. a. Pour tout entier $k \geqslant 1$, calculer la limite
$$\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^k}{x-1}.$$

b. Pour $k \geqslant 1$ entier, prouver la convergence de l'intégrale
$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^k}{x-1}\,\mathrm{d}x.$$

c. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{2x}$ en 0 à l'ordre 1, montrer que :
$$\forall x \in]-\infty, 0], \quad \left|\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{2x} + x\right| \leqslant \frac{3x^2}{2}.$$

3. a. En utilisant la question **2.**, montrer que :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \left|v_n + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{3}{2n^2}\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,\mathrm{d}u.$$

b. Donner alors un équivalent de v_n puis de $u_n - \frac{1}{2}$ en fonction de l'intégrale
$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u,$$
que l'on ne cherchera pas à calculer.

4 **1.** Nature des intégrales généralisées suivantes :
$$\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-\sqrt{|\ln t|}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{t^3+t} - t\right)\mathrm{d}t.$$

♣ **2.** Démontrer la convergence de l'intégrale généralisée ci-dessous puis la calculer grâce au changement de variable $u = t + \sqrt{t^2-1}$:
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + t\sqrt{t^2-1} - 1}.$$

3. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $\ln n! \sim n \ln n$ lorsque $n \to \infty$.

5 *EMLYON 2006*

Soit un entier $n \geqslant 2$. On note I_n la matrice identité de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

On considère un n-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$ et le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0$.

On appelle *matrice compagnon* du polynôme P la matrice C de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :
$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & (0) & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à C, i.e. l'endomorphisme représenté par C dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$. On note f^k, $k \in \mathbb{N}$, les itérés de f. En particulier, $f^0 = \mathrm{id}$ désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}^n$.

1. a. Exprimer, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1}.

b. En déduire que :
$$\forall j \in [\![1, n-1]\!], \quad f^j(e_1) = e_{j+1}$$
et :
$$f^n(e_1) = -(a_0e_1 + a_1e_2 + \cdots + a_{n-1}e_n).$$

2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_1f + a_0\,\mathrm{id}$.

a. Vérifier que $g(e_1) = 0$.

b. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $g \circ f^i = f^i \circ g$.

c. En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $g(e_i) = 0$.

d. Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f.
Application 1 : déterminer une matrice $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_5(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{A}^5 = \mathrm{A}^3 + 2\mathrm{A}^2 + \mathrm{I}_5$.

e. Établir que toutes les valeurs propres de C sont des racines du polynôme P.

3. a. Soit $\mathrm{Q} = \alpha_0 + \alpha_1\mathrm{X} + \cdots + \alpha_{n-1}\mathrm{X}^{n-1}$ un polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à $n-1$. On note $\mathrm{Q}(f)$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $\mathrm{Q}(f) = \alpha_0\,\mathrm{id} + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{n-1}f^{n-1}$.
Calculer $\mathrm{Q}(f)(e_1)$.

b. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à $n-1$ et annulateur de f.

c. Soit λ une racine du polynôme P. Il existe donc un unique polynôme $\mathrm{R} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - \lambda)\mathrm{R}$.
Vérifier que $(f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ \mathrm{R}(f)$ est l'endomorphisme nul de $\mathbb{C}^n$.

d. Conclure que toutes les racines du polynôme P sont des valeurs propres de C.

4. a. Montrer que, pour tout nombre complexe x, la matrice $\mathrm{C} - x\mathrm{I}_n$ est de rang supérieur ou égal à $n-1$. En déduire que chaque sous-espace propre de C est de dimension 1.

b. En déduire que C est diagonalisable si, et seulement si, P admet n racines deux-à-deux distinctes.

5. a. *Application 2* : montrer que la matrice A_1 ci-dessous est diagonalisable :
$$\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbb{C}).$$

b. *Application 3* : montrer que la matrice A_2 ci-dessous n'est pas diagonalisable :
$$\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbb{C}).$$

6. On note $\mathrm{B} = {}^t\mathrm{C}$ la matrice transposée de C.

a. Montrer que, pour tout nombre complexe t, la matrice $\mathrm{B} - t\mathrm{I}_n$ est inversible si, et seulement si, la matrice $\mathrm{C} - t\mathrm{I}_n$ est inversible.

b. En déduire que les matrices B et C ont les mêmes valeurs propres.

c. Soit λ une valeur propre de B. Déterminer une base du sous-espace propre de B associé à λ.

d. On suppose que le polynôme P admet n racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux-à-deux distinctes. Montrer que B est diagonalisable et en déduire que la matrice V ci-dessous (dite de Vandermonde) est inversible :

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}).$$

7. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ deux-à-deux distinctes.

a. Justifier qu'il existe une base $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés aux valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

b. Soit $a = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = \big(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)\big)$ est une base de E.

c. Montrer qu'il existe un polynôme $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}^n + b_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + b_1\mathrm{X} + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}_a$ soit la matrice compagnon du polynôme P_1.

6 *EMLYON 2014*

Soit $n \geqslant 2$ entier. On note $(\mathrm{V}_i)_{i=1}^n$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les matrices $\mathrm{E}_{i,j} = \mathrm{V}_i{}^t\mathrm{V}_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, forment la base canonique de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\mathrm{A} \neq \lambda\mathrm{I}_n$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère l'application $\Phi_\mathrm{A} : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi_\mathrm{A}(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} - \mathrm{MA}.$$

1. *Quelques généralités*

a. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Calculer $\Phi_\mathrm{A}(\mathrm{I}_n)$. L'endomorphisme Φ_A est-il injectif ? surjectif ?

2. *Étude d'un cas particulier*

On suppose, dans cette question seulement, que $n = 2$ et $\mathrm{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

a. Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ et donner les valeurs propres de A.

b. Écrire la matrice de Φ_A dans la base canonique $(\mathrm{E}_{1,1}, \mathrm{E}_{1,2}, \mathrm{E}_{2,1}, \mathrm{E}_{2,2})$ puis calculer le rang de cette matrice.

c. Déterminer les valeurs propres de Φ_A et montrer que Φ_A est diagonalisable.

3. *Étude du cas où* A *est diagonalisable*

On suppose, dans cette question seulement, que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que ${}^t\mathrm{A}$ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et que A et ${}^t\mathrm{A}$ ont les mêmes valeurs propres.

b. Soient $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que X (resp. Y) est un vecteur propre de A (resp. de ${}^t\mathrm{A}$). Montrer que $\mathrm{X}{}^t\mathrm{Y}$ est un vecteur propre de Φ_A.

c. Soient $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ et $(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n)$ deux bases de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{F}$ la famille $\mathcal{F} = (\mathrm{X}_i{}^t\mathrm{Y}_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
Montrer que, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{V}_i{}^t\mathrm{V}_j$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{F}$ et en déduire que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

d. Établir que Φ_A est diagonalisable.

e. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de Φ_A est l'ensemble des différences $\lambda - \mu$ lorsque λ et μ décrivent les valeurs propres de A.

4. *Étude d'un sous-espace propre de* Φ_A *associé à une valeur propre non nulle*

Soient λ une valeur propre non nulle de Φ_A et $\mathrm{T} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé.

a. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Phi_\mathrm{A}(\mathrm{T}^k) = \lambda k \mathrm{T}^k$.

b. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{T}^q = 0$ et $q \leqslant n^2$.

On note p l'entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{T}^p = 0$ et $\mathrm{T}^{p-1} \neq 0$.

c. Justifier qu'il existe $\mathrm{X} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{T}^{p-1}\mathrm{X} = 0$. Montrer que la famille $(\mathrm{X}, \mathrm{TX}, \ldots, \mathrm{T}^{p-1}\mathrm{X})$ est libre dans $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et en déduire que $p \leqslant n$.

5. *Étude du cas où* A *est symétrique*

On suppose, dans cette question seulement, que la matrice A est symétrique ; il existe donc une matrice $\mathrm{P} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit diagonale. On note $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_n$ les colonnes de P.
On considère le produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que :

$$\forall \mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle \mathrm{M}, \mathrm{N} \rangle = \left\langle \mathrm{M}{}^t\mathrm{N}, \mathrm{I}_n \right\rangle.$$

b. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, calculer ${}^t\mathrm{C}_i\mathrm{C}_j$.

c. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, déterminer les coefficients diagonaux de la matrice $\mathrm{C}_i{}^t\mathrm{C}_j$ et en déduire la valeur de $\left\langle \mathrm{C}_i{}^t\mathrm{C}_j, \mathrm{I}_n \right\rangle$.

d. Pour $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$, calculer $\left\langle \mathrm{C}_i{}^t\mathrm{C}_j, \mathrm{C}_k{}^t\mathrm{C}_\ell \right\rangle$.

e. On considère la famille $\mathcal{G} = (\mathrm{C}_i{}^t\mathrm{C}_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\mathcal{G}$ est une base orthonormale de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de Φ_A. Est-ce cohérent avec les résultats établis dans les questions précédentes ?

7 On considère la fonction g définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$g : x \longmapsto \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

a. On admet que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b. Étudier la nature des intégrales $\int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. a. Vérifier que la fonction g, définie dans le préambule, est définie sur $[-1,+\infty[$. Justifier sa continuité en -1.
b. Montrer que g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et préciser sa dérivée sur cet intervalle.
c. En admettant que $g(1) = \frac{\pi^2}{12}$, montrer que la fonction

$$x \longmapsto g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

est constante sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et préciser sa valeur.
d. En déduire un équivalent simple de $g(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

On considère l'ensemble E des fonctions u continues sur $]0,+\infty[$, à valeurs réelles, pour lesquelles l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{u(t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge.

3. a. Montrer que, pour $u, v \in \mathrm{E}$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{u(t)v(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge absolument.
b. Montrer que E est un espace vectoriel pour les lois usuelles.
c. Montrer que l'application

$$(u,v) \longmapsto \langle u, v\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{u(t)v(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire sur E.

Dans la suite de cette partie, l'espace E est muni de la structure préhilbertienne induite par ce produit scalaire.

4. Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $h_k : t \in\,]0,+\infty[\, \longmapsto (\ln t)^k$.
a. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_k(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge absolument.
On admettra que

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{8}.$$

b. En déduire que g est un élément de E et que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge absolument.
c. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction h_k est élément de E et que, si j et k sont deux entiers dont la somme $j+k$ est impaire, alors $\langle h_j, h_k\rangle = 0$.
Indication. On pourra utiliser le changement de variable $x = 1/t$.

5. Soit s l'application qui, à un élément u de E, associe la fonction $s(u)$ définie sur $]0,+\infty[$ par la formule

$$s(u) : t \longmapsto u\left(\frac{1}{t}\right).$$

a. Montrer que s est une involution linéaire (i.e. une symétrie vectorielle) de E.
b. En déduire que les sous-espaces vectoriels

$$\mathrm{F} = \left\{u \in \mathrm{E} : \forall t > 0,\, u\left(\frac{1}{t}\right) = u(t)\right\}$$

et

$$\mathrm{G} = \left\{u \in \mathrm{E} : \forall t > 0,\, u\left(\frac{1}{t}\right) = -u(t)\right\}$$

sont supplémentaires dans E.
c. Montrer que :

$$\forall (u,v) \in \mathrm{E}^2, \qquad \langle s(u), s(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

d. En déduire que les sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux.

Dans ces conditions, bien que l'espace E ne soit pas de dimension finie, le sous-espace $\mathrm{F}^\perp \supset \mathrm{G}$ est supplémentaire de F dans E et l'on dit que s est la symétrie orthogonale par rapport à F. On définit, comme en cours, la projection orthogonale p sur le sous-espace F.

6. a. Quelle formule relie s et p ?
b. En déduire que le projeté orthogonal de g sur F s'écrit $p(g) = \alpha h_0 + \beta h_2$ pour deux réels α et β que l'on déterminera.

7. Justifier que $\langle h_0, g - \alpha h_0 - \beta h_2\rangle = 0$ et en déduire la valeur de l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$