

Fonctions de plusieurs variables : optimisation

Feuille d'exercices

1 Étudier les extremums locaux et globaux des fonctions ci-dessous :

1. $f : (x, y) \in \mathcal{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{2+x-y^2}{1-x+y^2}$ (extremums globaux seulement) ;
2. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$;
3. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$;
4. $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{x^2}{2} + xyz - z + y$;
5. $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

2 On définit la fonction f sur $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-1, +\infty[$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{U}, \quad f(x, y, z) = x \ln(1+z) + (y-1)^2(z-1) + 2z.$$

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} et qu'elle y admet un unique point critique A que l'on déterminera.
2. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{U} et former sa matrice hessienne au point A.
3. Le point A est-il un extremum local pour la fonction f ?

3 On considère les fonctions

$$f : t \in]0, +\infty[\mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}, \quad F : x \in]0, +\infty[\mapsto \int_0^x f(t) dt$$

et

$$G : (x, y) \in]0, +\infty[^2 \mapsto F(xy) - F(x) - F(y).$$

1. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et exprimer, pour tout $x > 0$, $F'(x)$ et $F''(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f'(x)$.
2. Justifier que G est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$ et exprimer les dérivées partielles premières et secondes de G en tout point (x, y) de $]0, +\infty[^2$ en fonction de x, y, f et f' .
3. Établir que G admet $(1, 1)$ comme seul point critique.
4. Est-ce que G admet un extremum local ?

4 L'espace \mathbb{R}^3 est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère la fonction

$$f : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (1 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 + 3x_3^2)e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}.$$

1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une matrice $P \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPP = I_3$ et

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. a. Déterminer une base orthonormale \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 telle que pour tout $X \in \mathbb{R}^3$,

$$f(X) = (1 - 2y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2)e^{-(y_1^2+y_2^2+y_3^2)}$$

où y_1, y_2, y_3 désignent les coordonnées de X dans la base \mathcal{B} .

b. En déduire que pour tout $X \in \mathbb{R}^3$,

$$(1 - 2r^2)e^{-r^2} \leq f(X) \leq (1 + 4r^2)e^{-r^2}$$

où l'on a noté $r = \|X\|$. Préciser les cas où l'une des deux inégalités est une égalité.

3. Déduire de ce qui précède que f admet un maximum et un minimum que l'on déterminera et préciser les points où ils sont atteints.

5 Pour $n \geq 2$ entier donné, on considère l'application

★

$$f : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{k=1}^n x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k.$$

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^n et calculer ses dérivées partielles premières.
2. Montrer que f admet un unique point critique $A = (a_1, \dots, a_n)$ que l'on déterminera.
3. a. Déterminer la matrice hessienne de f en A en fonction de la matrice $J_n \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
b. Déterminer le rang de J_n et calculer $J_n U$ où $U \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est le vecteur dont tous les coefficients sont égaux à 1. En déduire les valeurs propres de J_n .
c. Montrer que f admet en A un extremum local dont on précisera la nature et la valeur.
d. Vérifier que l'extremum précédent est global.

6 On définit la fonction

☞

$$f : (x, y) \in]0, +\infty[^2 \mapsto \frac{(x+y)^2}{xy}.$$

1. Justifier que $f(x, y) \geq 4$ pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$.
2. En déduire que f admet un minimum global. Le calculer et préciser les points en lequel il est atteint.

7 On considère la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 4xy.$$

1. Montrer que f n'admet pas de maximum global.

2. L'objectif de cette question est de montrer que f admet un minimum global et de le calculer.

- Justifier qu'il suffit de travailler sur la restriction de f à $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.
- Étudier, pour $y \geq 0$ donné, les variations de la fonction $g_y : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y)$.
Montrer qu'elle admet un minimum global m_y que l'on exprimera en fonction de y .
- Étudier les variations de la fonction $y \mapsto m_y$ sur $[0, +\infty[$.
- Conclure.

8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2).$$

- Étudier les extremums locaux de f .
- Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
 - Justifier que f admet un maximum M et un minimum m sur \mathcal{D} et qu'ils sont atteints en des points $(x, y) \in \mathcal{D}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$.
 - Étudier la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$ et en déduire les valeurs de m et M .

9 On considère la fonction f définie sur $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - 2 \ln(y - x).$$

- Montrer que f admet un unique point critique A que l'on déterminera.
- En utilisant une formule de Taylor, justifier que f admet en A un minimum global que l'on calculera.
- La fonction f admet-elle un maximum global ? local ?

10 Soient $r > 0$, $A \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{B}'(A, r) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur la boule fermée $\mathcal{B}'(A, r)$ et de classe \mathcal{C}^1 sur la boule ouverte $\mathcal{B}(A, r)$.

Montrer que si f est constante sur la sphère $\mathcal{S}(A, r)$, alors le gradient de f s'annule en un point de la boule ouverte $\mathcal{B}(A, r)$.

11 1. Représenter graphiquement l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

et préciser sa nature topologique.

2. Étudier les extremums sur \mathcal{A} de la fonction

$$f : (x, y) \mapsto y^2 - x^2 y + x^2.$$

12 Soit $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ un nuage de points du plan, non alignés verticalement. En considérant la fonction

$$F : (m, p) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sum_{k=1}^n (y_k - mx_k - p)^2,$$

démontrer l'existence et l'unicité de la droite de régression de y en x et préciser son équation.

13 Dans chacun des cas suivants, étudier la position du plan tangent au graphe de f au point A indiqué.

- $f : (x, y) \mapsto xy(3 - x - y)$, $A_1 = (1, 1)$, $A_2 = (1, -1)$;
- $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 + (x - y)^2$, $A = (1, 0)$.

14 1. Déterminer les extremums de la fonction $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $x + y + z = 3$ en utilisant successivement les méthodes suivantes :

- en explicitant la contrainte ;
- sans expliciter la contrainte.

2. Déterminer les extremums de la fonction $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 - 2xz + 2yz + \frac{1}{2}z^2$ sous la contrainte $x - 2y + 2z = 9$ sans expliciter celle-ci.

3. La fonction

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-4, +\infty[\mapsto \begin{aligned} &2 - x - 8y + 7z - \frac{3}{2}x^2 + \\ &+ y^2 - 3yz + z^2 + y \ln(4 + z) \end{aligned}$$

présente-t-elle un extremum au point $A = (1, 0, -3)$ sous la contrainte $4x - y - z = 7$?

15 Soient a, b, c des réels strictement positifs.

1. Montrer que

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = abc, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^3 .

2. Montrer que $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto xyz$ admet sur \mathcal{K} un minimum et un maximum globaux que l'on déterminera, ainsi que les points en lesquels ils sont atteints.

16 Soient un entier $n \geq 1$ et des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ strictement positifs tels que $\sum_i \alpha_i = 1$. On considère les fonctions

$$f : (x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n \mapsto \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \quad \text{et} \quad g : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

On pose également :

$$\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n : g(x_1, \dots, x_n) = 1\}.$$

- Montrer que f admet un maximum μ sur Γ et que celui-ci est atteint sur $\Gamma \cap]0, +\infty[^n$.
- Déterminer les points critiques de f sur $]0, +\infty[^n$ sous la contrainte $g(x_1, \dots, x_n) = 1$.
Montrer que $\mu = f(1, \dots, 1) = 1$.
- En déduire que :

$$\forall x_1, \dots, x_n \geq 0, \quad \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

17 Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{D}, \quad f(x, y, z) = x \ln x + y \ln y + z \ln z.$$

1. La fonction f est-elle minorée, majorée, bornée sur \mathcal{D} ?
2. Justifier que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D} .

Étant donné un réel $a > 0$, on considère l'ensemble

$$\mathcal{C}_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 3a\}$$

et on note $g = f|_{\mathcal{C}_a}$ la restriction de f à \mathcal{C}_a .

3. Montrer que si g admet un extremum local au point (x, y, z) , alors :

$$1 + \ln x = 1 + \ln y = 1 + \ln z.$$

4. Étudier l'existence des extremums locaux de g . Comparer la valeur obtenue à celle trouvée à la première question.
5. Retrouver les extremums de g en se ramenant à l'étude des extremums d'une fonction de deux variables bien choisies.

18 Étudier les extremums des fonctions ci-dessous sous la contrainte indiquée :



1. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$ sous la contrainte $xy = 1$;
2. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 3x + y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 10$;
3. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y^2 - x^2$ sous la contrainte $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$;
4. $f : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \mapsto y - x^3$ sous la contrainte $x^3 + y^4 = 1$.

19 Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. L'objectif de l'exercice est d'établir le lemme 1.7

★ (et en particulier l'existence d'une valeur propre de A) par des méthodes analytiques.

1. **a.** Justifier que la forme quadratique q_A canoniquement associée à A est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^n .
b. Déterminer le gradient $\nabla q_A(X)$ de q_A en tout point $X \in \mathbb{R}^n$.
2. **a.** Justifier que sur la sphère unité $\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{R}^n : \|X\| = 1\}$, la fonction q_A admet un minimum α et un maximum β .
b. Montrer que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \|X\|^2 \leq q_A(X) \leq \beta \|X\|^2.$$

En déduire que les valeurs propres de A appartiennent à l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

- c.** Montrer qu'un vecteur $X \neq 0$ réalise l'égalité dans une des deux inégalités ci-dessus si, et seulement si, il est propre pour α ou β .
- d.** En déduire en particulier que A admet au moins une valeur propre, en particulier que α et β sont respectivement les plus petite et plus grande valeurs propres de A .