Travaux dirigés

Fonctions de plusieurs variables : optimisation

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2017/2018

Exercice 1

Question 1

La fonction f est bien définie sur $\mathcal{B}(0,1)$ car, pour $X=(x,y)\in\mathcal{B}(0,1)$, $x^2\leqslant x^2+y^2=\|X\|^2<1$ si bien que $x<1$ et $1-x+y^2\geqslant 1-x>0$.

Tout d'abord,

$$f(x,0)=\frac{2+x}{1-x}\xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x<1}]{}+\infty$$

si bien que f n'admet pas de maximum.

Bien qu'il soit possible de conclure par un calcul direct, on peut simplifier (légèrement) les calculs et illustrer une méthode intéressante en remarquant que pour tout $(x,y)\in\mathcal{B}(0,1)$, on a

$$f(x,y)=\frac{2+u}{1-u}=g(u)$$

où $u=x-y^2<1$. Une rapide étude montre que g est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty,1[$ dans lequel u prend ses valeurs. Par suite, f admet un minimum en un point (x_0,y_0) si, et seulement si, la fonction $u:(x,y)\longmapsto x-y^2$ admet un minimum en ce point. Mais sur l'ouvert $\mathcal{B}(0,1)$,

$$\forall (x,y)\in\mathcal{B}(0,1),\quad \nabla u(x,y)=(1,-2y)\neq 0$$

ce qui exclut l'existence d'un minimum pour u et donc pour f.

La fonction f ne présente donc pas d'extremum global.

Exercice 1

Question 2

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \nabla f(x,y)=(6xy-12x,3y^2+3x^2-12y).$$

Elle admet quatre points critiques, seuls extremums locaux éventuels :

$$A=(0,0),\quad B=(0,4),\quad C=(2,2)\quad\text{et}\quad D=(-2,2).$$

La hessienne est donnée par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \nabla^2 f(x,y)=\begin{pmatrix}6y-12 & 6x\\ 6x & 6y-12\end{pmatrix}.$$

- En particulier en A,

  $$\nabla^2 f(A)=\begin{pmatrix}-12 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix}$$

  admet deux valeurs propres strictement négatives donc f présente un maximum local en ce point.

- Au point B,

  $$\nabla^2 f(B)=\begin{pmatrix}12 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix}$$

  admet deux valeurs propres strictement positives et f présente un minimum local en ce point.
- Au point C,

  $$\nabla^2 f(C)=\begin{pmatrix}0 & 12\\ 12 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r & s\\ s & t\end{pmatrix}$$

  où $rt-s^2<0$, la fonction f présente donc un col.
- Au point D,

  $$\nabla^2 f(D)=\begin{pmatrix}0 & -12\\ -12 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r & s\\ s & t\end{pmatrix}$$

  où $rt-s^2<0$, la fonction f présente donc un col.

La fonction f n'admet aucun extremum global car elle n'est pas bornée : $f(0,y)=y^3-6y^2+2\sim y^3$, $y\to\pm\infty$.

Exercice 1

Question 3

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \nabla f(x,y)=\big(4(x^3-x+y),4(y^3+x-y)\big).$$

Elle admet trois points critiques, seuls extremums locaux éventuels :

$$A=(0,0),\quad B=(\sqrt{2},-\sqrt{2})\quad\text{et}\quad C=(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

La hessienne est donnée par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \nabla^2 f(x,y)=\begin{pmatrix}12x^2-4 & 4\\ 4 & 12y^2-4\end{pmatrix}.$$

- En particulier en B et en C,

  $$\nabla^2 f(B)=\nabla^2 f(C)=\begin{pmatrix}20 & 4\\ 4 & 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r & s\\ s & t\end{pmatrix}$$

  où $rt-s^2>0$ et $r>0$. La fonction f présente donc un minimum local en B et en C.

- En A,

  $$\nabla^2 f(A)=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ 4 & -4\end{pmatrix}$$

  a pour déterminant 0 et l'on ne peut pas conclure directement. Pour $H=(h,k)\in\mathbb{R}^2$, on forme la différence

  $$d(H)=f(A+H)-f(A)=f(h,k)=h^4+k^4-2(h-k)^2.$$

  On observe que $d(h,0)=(h^2-2)h^2<0$ lorsque $h\to 0$ alors que $d(h,h)=2h^4>0$ lorsque $h\to 0$. La différence $d(h,k)$ ne garde donc pas un signe constant au voisinage de 0, ce qui signifie que f ne présente pas d'extremum local en ce point.

Remarque. En écrivant

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=(x^2-2)^2+(y^2-2)^2+2(x+y)^2-8\geqslant -8,$$

on observe que B et C sont des minimums globaux pour f. En revanche, f n'admet pas de maximum local donc pas de maximum global.

Exercice 1

Question 4

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$ avec :

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad \nabla f(x,y,z)=(x+yz,xz+1,xy-1).$$

Elle admet un unique point critique : $A=(1,1,-1)$, seul extremum local éventuel. La hessienne au point A est donnée par :

$$\nabla^2 f(A)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Elle admet pour valeurs propres 1, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. Celles-ci étant non nulles mais pas toutes de même signe, la fonction f ne présente pas d'extremum au point A.

Remarque. On peut également calculer, pour $H=(h,k,\ell)$,

$$d(H)=f(A+H)-f(A)=\frac{h^2}{2}+hk\ell+h\ell-hk+k\ell$$

et observer que pour $h\to 0$, $d(h,0,h)=\frac{3}{2}h^2>0$ alors que $d(h,h,0)=-\frac{1}{2}h^2<0$.

Exercice 1

Question 5

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$ avec :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \nabla f(x,y,z) = 2(x - yz, y - xz, z - xy).$$

Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\nabla f(x,y,z) = 0 \iff \begin{cases} x = yz \\ y = xz \\ z(1-x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1 \\ yz = 1 \\ y = z \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ yz = -1 \\ y = -z \end{cases}.$$

La fonction f admet donc 5 points critiques

$$A = (0,0,0), \quad B = (1,1,1), \quad C = (1,-1,-1),$$
$$D = (-1,1,-1) \quad \text{et} \quad E = (-1,-1,1).$$

La hessienne est donnée par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \nabla^2 f(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} 1 & -z & -y \\ -z & 1 & -x \\ -y & -x & 1 \end{pmatrix}.$$

- Au point critique A, $\nabla^2 f(A) = 2I_3$ a toutes ses valeurs propres strictement positives, donc f admet un minimum local.
- Au point critique B,

$$\nabla^2 f(B) = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a pour valeurs propres -2 et 4, non nulles et de signes opposés. Le point B n'est donc pas un extremum local pour f.

- Au point critique C,

$$\nabla^2 f(C) = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres ne sont pas immédiates à trouver. En revanche, on calcule facilement

$$q_C(h,k,\ell) = 2(h^2 + k^2 + \ell^2 + 2hk + 2h\ell - 2k\ell) = 2(h+k+\ell)^2 - 8h\ell$$

et on observe que $q_C(1,0,0) = 2 > 0$ et $q_C(2,-1,-1) = -8 < 0$. La fonction f ne présente donc pas non plus d'extremum local en C.
- Les points critiques D et E s'obtiennent à partir de C par permutation des variables. Vu le rôle symétrique des variables x, y et z dans l'expression de f, ils sont de même nature que C : f n'y présente pas d'extremum local.

La fonction f n'est ni minorée ni majorée donc n'admet pas d'extremum global : $f(x,x,x) = 3x^2 - x^3 \sim -x^3$, $x \to \pm\infty$.

Exercice 2

Question 1

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{U}$ par opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^1$ avec, pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{U}$:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\ln(1+z), 2(y-1)(z-1), \frac{x}{1+z} + (y-1)^2 + 2\right).$$

Il existe un unique point critique pour f, i.e. un seul élément de $\mathcal{U}$ qui annule le gradient de f : $A = (-2,1,0)$.

Exercice 2

Question 2

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\mathcal{U}$ par opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^2$ avec, pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{U}$:

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{1+z} \\ 0 & 2(z-1) & 2(y-1) \\ \frac{1}{1+z} & 2(y-1) & -\frac{x}{(1+z)^2} \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Question 3

La matrice $\nabla^2 f(A)$ admet -2 pour valeur propre évidente (par exemple, ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour cette valeur propre).

La matrice étant symétrique réelle, elle est diagonalisable. En notant $\lambda_1 = -2$, λ_2 et λ_3 ses valeurs propres, on a donc $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \operatorname{tr} \nabla^2 f(A) = 0$. Ainsi $\lambda_2 + \lambda_3 = 2 > 0$ si bien que $\nabla^2 f(A)$ admet nécessairement une valeur propre strictement positive.

La hessienne $\nabla^2 f(A)$ admettant deux valeurs propres non nulles de signes opposés, le point A n'est pas un extremum local pour la fonction f.

Exercice 3

Question 1

La fonction f admettant une limite finie à l'origine, l'intégrale $F(x)$ est faussement généralisée donc bien définie pour tout $x > 0$. On notera encore f le prolongement par continuité de f à l'origine, défini par $f(0) = 1$.

La fonction f étant continue sur $[0, +\infty[$, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ d'après le théorème fondamental, avec $F' = f$. La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, la fonction F est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ avec $F' = f$ et $F'' = f'$.

Exercice 3

Question 2

La fonction G est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$ par opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^2$ avec, pour tout $(x,y) \in]0, +\infty[^2$,

$$\begin{aligned} \nabla G(x,y) &= (yF'(xy) - F'(x), xF'(xy) - F'(y)) \\ &= (yf(xy) - f(x), xf(xy) - f(y)) \end{aligned}$$

et :

$$\nabla^2 G(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 f'(xy) - f'(x) & f(xy) + xyf'(xy) \\ f(xy) + xyf'(xy) & x^2 f'(xy) - f'(y) \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Question 3

Un point $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ est critique pour G si, et seulement si,

$$\begin{cases} yf(xy) - f(x) = 0 \\ xf(x) = yf(y) \end{cases} \iff \begin{cases} yf(xy) - f(x) = 0 \\ \ln(1+x) = \ln(1+y) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} xf(x^2) - f(x) = 0 \\ x = y \end{cases}.$$

Or :

$$xf(x^2) - f(x) = 0 \iff \ln(1+x^2) = \ln(1+x) \iff x^2 = x$$

et la fonction G admet donc $A = (1, 1)$ pour seul point critique.

Exercice 3

Question 4

Puisque G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$, le seul extremum local éventuel de G est en A, seul point critique de G.

En ce point, la hessienne s'écrit

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} 0 & f(1) + f'(1) \\ f(1) + f'(1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

Elle a un déterminant $rt - s^2 = -\big(f(1) + f'(1)\big)^2 = -\frac{1}{4} < 0$ et le point A n'est donc pas un extremum local pour G : c'est un point col.

Exercice 4

Question 1

La matrice A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont (supplémentaires) orthogonaux. Autrement dit, si P désigne la matrice de passage de la base canonique à une base orthonormale (U_1, U_2, U_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A, alors P est orthogonale (${}^tPP = I_3$ i.e. $P^{-1} = {}^tP$) et telle que, d'après la formule de changement de base, la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.
Les calculs conduisent par exemple à

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tPAP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D.$$

Exercice 4

Question 2.a

En identifiant $\mathbb{R}^3$ à $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en notant $Y = (y_1, y_2, y_3)$ la colonne des coordonnées de X dans la base $\mathscr{B} = (U_1, U_2, U_3)$, on a $X = PY$ si bien que :

$$\begin{aligned} f(X) &= (1 + {}^tXAX)\mathbf{e}^{-{}^tXX} = \big(1 + {}^t(PY)A(PY)\big)\mathbf{e}^{-{}^t(PY)(PY)} \\ &= \big(1 + {}^tY{}^tPAPY)\big)\mathbf{e}^{-{}^tY{}^tPPY} = (1 + {}^tYDY)\mathbf{e}^{-{}^tYY} \\ &= (1 - 2y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2)\mathbf{e}^{-(y_1^2+y_2^2+y_3^2)}. \end{aligned}$$

Exercice 4

Question 2.b

Vu l'expression de la norme en base orthonormale, on a $r^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ et l'encadrement demandé est alors une conséquence immédiate de l'expression obtenue en **a.** :

$$(1 - 2r^2)\mathbf{e}^{-r^2} \leqslant f(X) \leqslant (1 + 4r^2)\mathbf{e}^{-r^2}.$$

Remarque. On a égalité dans l'inégalité de gauche si, et seulement si, $y_2 = y_3 = 0$ i.e. $X \in \operatorname{Vect} U_1 = E_{-2}(A)$. De même, on a égalité dans l'inégalité de droite si, et seulement si, $X \in E_4(A)$.

Exercice 4

Question 3

L'étude des variations des fonctions d'une variable $r \longmapsto (1 - 2r^2)\mathbf{e}^{-r^2}$ et $r \longmapsto (1 + 4r^2)\mathbf{e}^{-r^2}$ montre qu'elles admettent respectivement un minimum égal à $-2\mathbf{e}^{-3/2}$ atteint en $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et un maximum égal à $4\mathbf{e}^{-3/4}$ atteint en $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Dès lors, l'encadrement de la question **2.b.** met en évidence que :

- la fonction f est minorée par $-2\mathbf{e}^{-3/2}$, qui est un minimum atteint en les points tels que $X \in E_{-2}(A)$ et $\|X\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$, i.e. en $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}U_1$ où $U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$;
- la fonction f est majorée par $4\mathbf{e}^{-3/4}$, qui est un maximum atteint en les points tels que $X \in E_4(A)$ et $\|X\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, i.e. en $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}U_3$ où $U_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$.

Exercice 5

Question 1

La fonction f est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$ avec :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \forall X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \partial_j f(X) = 2x_j + 2\sum_{k=1}^n x_k - 1.$$

Exercice 5

Question 2

Si $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est point critique de f i.e.

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad 2x_j + 2\sum_{k=1}^n x_k - 1 = 0,$$

alors

$$0 = \sum_{j=1}^n \partial_j f(X) = 2(n+1)\sum_{k=1}^n x_k - n$$

d'où

$$\sum_{k=1}^n x_k = \frac{n}{2(n+1)}$$

puis :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad x_j = -\sum_{k=1}^n x_k + \frac{1}{2} = \frac{1}{2(n+1)}.$$

La réciproque étant immédiate, la fonction f admet donc un seul point critique $A = \frac{1}{2(n+1)}(1, 1, \ldots, 1)$.

Exercice 5

Question 3.a

On a :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], \quad \forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \partial^2_{i,j} f(X) = \begin{cases} 4 & \text{si } i = j \\ 2 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

La matrice hessienne de f en tout point $X \in \mathbb{R}^n$ (et en particulier en A) est donc donnée par :

$$\nabla^2 f(X) = 2I_n + 2J_n.$$

Exercice 5

Question 3.b

Toutes les colonnes de J_n étant égales et non nulles, elles engendrent une droite. Ainsi la matrice J_n est de rang 1. La matrice J_n admet donc 0 pour valeur propre et le sous-espace propre associé est l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$.

Le calcul immédiat $J_n U = nU$ met aussi en évidence que n est valeur propre et que U est un vecteur propre associé.

Pour des raisons dimensionnelles, on a toutes les valeurs propres de J_n : 0 et n.

Remarque. Le deuxième point n'est pas une surprise : la matrice J_n étant symétrique réelle, elle est diagonalisable. Puisque 0 est déjà valeur propre avec pour sous-espace propre l'hypeprlan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$, la dernière valeur propre est égale à $\lambda_n = \operatorname{tr} J_n - (n-1) \times 0 = n$ et le sous-espace propre associé est la droite $E_n(J_n) = E_0(J_n)^\perp$ engendrée par ${}^t\!\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Question 3.c

D'après **a.**, un réel λ est valeur propre de $\nabla^2 f(A)$ si, et seulement si,

$$\nabla^2 f(A) - \lambda I_n = 2\big(J_n - (\frac{\lambda}{2} - 1)I_n\big)$$

n'est pas inversible i.e. si, et seulement si, $\frac{\lambda}{2} - 1$ est valeur propre de J_n.
D'après **b.**, la matrice $\nabla^2 f(A)$ admet donc pour valeurs propres 2 et $2(n+1)$, toutes deux strictement positives. Dans ces conditions, la fonction f présente un minimum local au point A, égal à

$$f(A) = \frac{-n}{4(n+1)}.$$

Exercice 5

Question 3.d

Le minimum atteint en A est global car la hessienne $\nabla^2 f(X)$ est positive pour tout point X de l'ouvert convexe $\mathbb{R}^n$ d'après les questions précédentes. En effet, étant donné $H \in \mathbb{R}^n$, la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction partielle $t \longmapsto f(A + tH)$ sur $[0,1]$ donne :

$$\begin{aligned} f(A+H) - f(A) &= u(1) - u(0) = u'(0) + \int_0^1 (1-t)u''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (1-t) q_{A+tH}(H)\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \end{aligned}$$

car $u'(0) = \partial_H f(A) = \langle \nabla f(A), H \rangle = 0$.

Remarque. La fonction f étant polynomiale de degré 2, son développement limité à l'ordre 2 en A est exact :

$$\forall H \in \mathbb{R}^n, \quad f(A+H) = f(A) + \langle \nabla f(A), H \rangle + \frac{1}{2} q_A(H)$$

et l'on peut conclure facilement que A est un minimum global à partir du signe de q_A. On renvoie à la remarque terminant l'exercice 12 pour plus de détails.

Exercice 6

Question 1

Il vient :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \quad f(x,y) - 4 = \frac{(x-y)^2}{xy} \geqslant 0.$$

Exercice 6

Question 2

On a égalité dans l'inégalité $f(x,y) \geqslant 4$ si, et seulement si, $x = y$. La fonction f admet donc un minimum égal à 4, atteint en tout point de la demi-droite ouverte d'équation $y = x$, $x > 0$.

Exercice 7

Question 1

On a $f(x,0) = x^4 \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$. La fonction f n'est donc pas majorée et n'admet donc pas de maximum global.

Exercice 7

Question 2.a

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,y) = f(-x,-y)$ où $(x,y) \longmapsto (-x,-y)$ est une bijection (involutive) de $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$ sur $\mathbb{R} \times]-\infty, 0]$.
Par suite, si la restriction de f à $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$ admet en $(a,b) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$ un minimum, alors le point (a,b) est aussi un minimum pour f, ainsi que $(-a,-b)$, et réciproquement [1].
Il suffit donc de minimiser la fonction f sur $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$.

1. Si f présente en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ un minimum, alors il en va de même en $(-a,-b)$. L'un des points (a,b) et $(-a,-b)$ appartient alors à $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$ et est un minimum pour la restriction de f.

Exercice 7
Question 2.b

Pour $y \geqslant 0$ donné, la fonction

$$g_y : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

est dérivable avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_y'(x) = 4(x^3 - y).$$

La fonction g_y est donc décroissante sur $]-\infty, y^{1/3}]$ puis croissante sur $[y^{1/3}, +\infty[$ et admet donc un minimum en $y^{1/3}$ égal à

$$m_y = g_y(y^{1/3}) = f(y^{1/3}, y) = y^4 - 3y^{4/3}.$$

Exercice 7
Question 2.c

La fonction $y \longmapsto m_y = y^4 - 3y^{4/3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (car $\frac{4}{3} > 1$), de dérivée

$$y \longmapsto 4(y^3 - y^{1/3}) = 4y^{1/3}(y^{8/3} - 1).$$

Elle est donc décroissante sur $[0,1]$ puis croissante sur $[1, +\infty[$ et admet un minimum en 1 égal $m(1) = -2$.

Exercice 7
Question 2.d

D'après **b.** et **c.**,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \quad f(x,y) \geqslant m_y \geqslant -2$$

avec égalité si, et seulement si, $(x,y) = (y^{1/3}, y)$ et $y = 1$ c'est-à-dire pour $(x,y) = (1,1)$.
D'après **a.**, la fonction f présente donc un minimum aux points $(1,1)$ et $(-1,-1)$ égal à -2.

Exercice 8
Question 1

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x,y) = 3(x^2 - 1 - y^2, -2xy).$$

Elle admet deux points critiques : $A = (1,0)$ et $B = (-1,0)$, seuls extremums locaux éventuels. La hessienne est donnée par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla^2 f(x,y) = 6\begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix}.$$

- Au point A,
$$\nabla^2 f(A) = 6\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
admet deux valeurs propres non nulles et de signes opposés, la fonction f ne présente donc pas d'extremum local.
- De même en B où
$$\nabla^2 f(B) = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8
Question 2.a

L'ensemble $\mathcal{D}$ est fermé et borné (en tant que boule fermée...). La fonction f y étant continue, elle y est donc bornée et atteint ses bornes, i.e. admet minimum m et maximum M.

Ces extremums ne sont pas atteints en un point de la boule *ouverte* $\mathcal{B}(0,1)$, sans quoi ce devrait être en un point critique de f, qui n'en admet aucun sur cet ouvert. Ils le sont donc en un point du bord $\mathcal{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Exercice 8
Question 2.b

L'ensemble $\mathcal{S}$ étant paramétré par le chemin $t \in [-\pi, \pi] \longmapsto (\cos t, \sin t)$, l'étude de f sur $\mathcal{S}$ revient à celle de la fonction

$$g : t \in [-\pi, \pi] \longmapsto f(\gamma(t)) = 4\cos^3 t - 6\cos t.$$

On observe que $g(t) = P(\cos t)$ où $P(x) = 4x^3 - 6x$ et $x = \cos t$ parcourt le segment $[-1,1]$. L'étude des variations de P sur le segment $[-1,1]$ montre qu'il admet un minimum égal à $-2\sqrt{2}$ et un maximum égal à $2\sqrt{2}$.
La fonction f admet donc pour minimum $m = -2\sqrt{2}$ et pour maximum $M = 2\sqrt{2}$ sur le bord $\mathcal{S}$ et donc sur l'ensemble $\mathcal{D}$ d'après **a.**.

Exercice 9
Question 1

L'ensemble $\mathcal{U}$ est ouvert comme image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[$ par l'application $(x,y) \longmapsto y - x$, continue sur $\mathbb{R}^2$.
La fonction f y est de classe $\mathscr{C}^2$ avec :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U}, \quad \nabla f(x,y) = 2\Big(x + \frac{1}{y-x}, y - \frac{1}{y-x}\Big).$$

Elle admet un unique point critique $A = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Exercice 9
Question 2

En un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la hessienne est donnée par

$$\nabla^2 f(x,y) = 2\begin{pmatrix} 1+\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

où $\alpha = \frac{1}{(y-x)^2} > 0$. On a $rt - s^2 = 4(1+2\alpha) > 0$ et $r = 2(1+\alpha) > 0$ si bien que $\nabla^2 f(x,y)$ est positive.
Dans ces conditions, étant donné $H \in \mathbb{R}^2$ tel que $A + H \in \mathcal{U}$, la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction partielle $u : t \longmapsto f(A+tH)$ sur $[0,1]$, bien définie et $\mathscr{C}^2$ car $\mathcal{U}$ est convexe, donne :

$$f(A+H) - f(A) = u(1) - u(0) = u'(0) + \int_0^1 (1-t)u''(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 (1-t)q_{A+tH}(H)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

car $u'(0) = \partial_H f(A) = \langle \nabla f(A), H \rangle = 0$.
La fonction f présente donc un minimum global au point A.

Exercice 9

Question 3

Sur l'ouvert $\mathcal{U}$, la fonction f ne peut admettre de maximum qu'au point critique A. Or elle y admet un minimum et n'y est pas localement constante (sinon elle admettrait une infinité de points critiques). Elle ne peut donc y admettre de maximum local.
La fonction f n'admet donc pas de maximum (ni local ni global).

Exercice 10

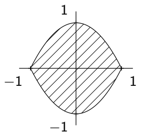
On reconnaît une généralisation du théorème de Rolle, on essaie donc d'adapter la démonstration.

Si f est constante, le gradient de f est nul en tout point de la boule ouverte $\mathcal{B}(A, r)$.
Si f n'est pas constante, alors il existe $B \in \mathcal{B}(A, r)$ tel que $f(B) \neq \alpha$, où α est la valeur de f sur la sphère $\mathcal{S}$. Quitte à considérer $-f$ plutôt que f, on peut supposer que $f(B) > \alpha$.
La fonction f, continue sur la partie $\mathcal{B}'(A, r)$ fermée, bornée et non vide, y admet un maximum $M \geqslant f(B)$ nécessairement atteint sur l'ouvert $\mathcal{B}(A, r)$... et donc en un point critique de f : le gradient de f s'annule donc sur l'ouvert $\mathcal{B}(A, r)$.

Exercice 11

Question 1

L'ensemble $\mathcal{A}$ est délimité par deux paraboles ; il est représenté ci-contre.



L'ensemble $\mathcal{A}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leqslant y\}$ est fermé comme image réciproque du fermé $[-1, +\infty[$ par l'application $(x, y) \longmapsto y - x^2$ continue sur $\mathbb{R}^n$. De même, $\mathcal{A}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant 1 - x^2\}$ est fermé. Par suite, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ est fermé comme intersection de fermés.

L'ensemble $\mathcal{A}$ est également borné : pour $(x, y) \in \mathcal{A}$, on a $|y| \leqslant 1$ d'où $y^2 \leqslant |y| \leqslant 1 - x^2$ i.e. $\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 \leqslant 1$.

L'intérieur de $\mathcal{A}$ est l'ouvert défini par :

$$\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 < y < 1 - x^2\}.$$

Exercice 11

Question 2

La fonction f, continue sur $\mathcal{A}$ fermé, borné et non vide, y admet un minimum m et un maximum M.

- Si l'un de ces extremums est atteint sur l'intérieur $\mathcal{U}$, c'est en un point critique de la fonction f, de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ avec :

  $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = \big(2x(1 - y), 2y - x^2\big).$$

  Elle admet trois points critiques : $(0, 0)$, $(-\sqrt{2}, 1)$ et $(\sqrt{2}, 1)$, dont seul $A = (0, 0)$ appartient à $\mathcal{U}$, qui est donc le seul élément de $\mathcal{U}$ en lequel f peut présenter un extremum.

- Le bord de $\mathcal{A}$ est la réunion des portions de paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ paramétrées par $x \in [-1, 1] \longmapsto (x, x^2 - 1)$ et $x \in [-1, 1] \longmapsto (x, 1 - x^2)$. D'une part,

  $$\forall x \in [-1, 1], \quad f(x, x^2 - 1) = 1$$

  et la fonction f est donc constante sur $\mathcal{P}_1$. D'autre part, une rapide étude des variations de

  $$g : x \in [-1, 1] \longmapsto f(x, 1 - x^2) = 2x^4 - 2x^2 + 1$$

  montre que la fonction f admet sur $\mathcal{P}_2$ un minimum égal à $\frac{1}{2}$ atteint en $\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\big)$ et $\big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\big)$ ainsi qu'un maximum égal à 1 atteint en $B = (0, 1)$, $(-1, 0)$ et $(1, 0)$.

En comparant les extremums de f sur le bord de $\mathcal{A}$ à la valeur de $f(A) = 0$, seul extremum possible sur $\mathcal{U}$, on en déduit que f admet sur $\mathcal{A}$ un minimum égal à $m = 0$ atteint en A et un maximum égal à $M = 1$ atteint en B ainsi qu'en tout point de $\mathcal{P}_1$.

Exercice 12

On note

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y}) = \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}, \quad \sigma_x = \sqrt{\operatorname{cov}(x, x)}.$$

La fonction

$$F : (m, p) \longmapsto \sum_{k=1}^{n}(y_k - m x_k - p)^2$$

est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\begin{aligned}\forall (m, p) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla F(m, p) &= \Big(-2\sum_{k=1}^{n} x_k(y_k - m x_k - p), -2\sum_{k=1}^{n}(y_k - m x_k - p)\Big) \\ &= -2n\big(\overline{xy} - m\overline{x^2} - p\overline{x}, \overline{y} - m\overline{x} - p\big).\end{aligned}$$

Pour $(m, p) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla F(m, p) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x^2} \\ p = \overline{y} - m\overline{x} \end{cases}$$

où $\sigma_x^2 > 0$ car les points ne sont pas alignés verticalement. Ainsi la fonction f admet pour seul point critique A dont les coordonnées sont données ci-dessus.

La hessienne est constante égale à :

$$\forall (m, p) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla^2 F(m, p) = 2n\begin{pmatrix} \overline{x^2} & \overline{x} \\ \overline{x} & 1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est $4n^2(\overline{x^2} - \overline{x}^2) = 4n^2\sigma_x^2 > 0$ et le premier coefficient diagonal $2n\overline{x^2} > 0$. La fonction F présente donc un minimum local au point A.

Enfin, ce minimum est global car la hessienne est positive en tout point de l'ouvert convexe $\mathbb{R}^2$ d'après le calcul précédent. En effet, étant donné $H \in \mathbb{R}^2$, la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction partielle $u : t \longmapsto F(A + tH)$ sur $[0, 1]$ donne :

$$\begin{aligned} F(A + H) - F(A) = u(1) - u(0) &= u'(0) + \int_0^1 (1 - t)u''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (1 - t)q_{A+tH}(H)\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \end{aligned}$$

car $u'(0) = \partial_H F(A) = \langle \nabla F(A), H\rangle = 0$.

En conclusion, il existe une unique droite dont les coefficients m et p minimisent la fonctionnelle F, elle a pour équation

$$y - \overline{y} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x^2}(x - \overline{x}).$$

Remarque. L'expression de $F(m,p)$ est polynomiale de degré 2 en (m,p). Pour $H \in \mathbb{R}^2$ voisin de 0, le développement limité de $F(A+H)$ à l'ordre 2 s'obtient à partir de celui de la fonction partielle $u : t \longmapsto F(A+tH)$. Comme cette dernière est aussi polynomiale de degré inférieur ou égal à 2, son développement à l'ordre 2 est exact, i.e. le reste est nul. Il en va donc de même pour le développement limité de F en A à l'ordre 2 :

$$F(A+H) = F(A) + \langle \nabla F(A), H \rangle + \frac{1}{2} q_A(H)$$

et l'on obtient alors simplement

$$F(A+H) - F(A) = \frac{1}{2} q_A(H) \geqslant 0.$$

Exercice 13

Question 1

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x,y) = (3y - 2xy - y^2, 3x - x^2 - 2xy)$$

et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 3-2x-2y \\ 3-2x-2y & -2x \end{pmatrix}.$$

On note Σ le graphe de f.

On constate que $\nabla f(A_1) = 0$, autrement dit le point A_1 est critique pour f. Le plan tangent à Σ au point A_1 est donc horizontal d'équation $z = f(A_1)$ i.e. $z = 1$ et la question de sa position par rapport à Σ revient donc à savoir si f présente un extremum au point A_1.
Or

$$\nabla^2 f(A_1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

où $rt - s^2 = 3 > 0$ et $r = -2 < 0$. Dans ces conditions, f présente un maximum local au point A_1 : $f(X) \leqslant f(A_1) = 1$ au voisinage de A_1, ce qui signifie que Σ est situé localement en dessous de son plan tangent au point A_1.

Au point A_2, $\nabla f(A_2) = (-2, 4)$ et le plan tangent à Σ a donc pour équation

$$z = f(A_2) + \langle \nabla f(A_2), X - A_2 \rangle \iff z = 3 - 2x + 4y.$$

Le point A_2 est critique pour la fonction auxiliaire $g : X \longmapsto f(X) - \langle \nabla f(A_2), X \rangle$ qui a la même hessienne que f :

$$\nabla^2 g(A_2) = \nabla^2 f(A_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

de déterminant $-13 < 0$. Dans ces conditions, g ne présente pas d'extremum local au point A_2. Sachant que

$$\forall X \in \mathbb{R}^2, \quad \Big(g(X) \leqslant g(A_2) \Leftrightarrow f(X) \leqslant f(A_2) + \langle \nabla f(A_2), X - A_2 \rangle \Big),$$

cela signifie que la plan tangent à Σ au point A_2 ne reste pas du même côté de Σ au voisinage de A_2.

Exercice 13

Question 2

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x,y) = 2(2x^3 + x - y, 2y^3 - x + y).$$

En particulier, $\nabla f(A) = 2(3, -1)$ et le graphe Σ de f admet donc au point A le plan tangent d'équation

$$z = f(A) + \langle \nabla f(A), X - A \rangle \iff z = -4 + 6x - 2y.$$

Le point A est critique pour la fonction auxiliaire $g : X \longmapsto f(X) - \langle \nabla f(A), X \rangle$ avec

$$\nabla^2 g(A) = \nabla^2 f(A) = 2 \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

On a $rt - s^2 = 24 > 0$ et $r > 0$, si bien que g admet un minimum local au point A. En d'autres termes, on a

$$g(X) \geqslant g(A) \iff f(X) \geqslant f(A) + \langle \nabla f(A), X - A \rangle$$

pour X voisin de A, ce qui signifie que Σ est localement au dessus de son plan tangent au point A.

Exercice 14

Question 1.a

La contrainte $\mathcal{C}$ est explicite :

$$x + y + z = 3 \iff z = 3 - x - y.$$

Étudier les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$ revient donc à étudier les extremums de la fonction

$$g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(x, y, 3 - x - y) = 2x^2 + 2xy - 6x + 2y^2 - 6y + 9.$$

La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla g(x,y) = 2(2x + y - 3, x + 2y - 3)$$

et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla^2 g(x,y) = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

Elle admet $A = (1,1)$ pour unique point critique donc pour seul extremum local éventuel.

Sachant que $rt - s^2 = 12 > 0$ et $r > 0$, la matrice symétrique $\nabla^2 f(A)$ est définie-positive, ce qu'on peut également justifier en décomposant la forme quadratique q_A qui lui est canoniquement associée :

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}, \quad q_A(h,k) = 4(h^2 + hk + k^2) = 4\Big(h + \frac{k}{2}\Big)^2 + 3k^2 > 0.$$

Dans ces conditions, la fonction g présente en A un minimum local.
Puisque g est polynomiale de degré 2, on a déjà vu que son développement limité à l'ordre 2 au point A est exact :

$$\begin{aligned} \forall H = (h,k) \in \mathbb{R}^2, \quad g(A+H) &= g(A) + \langle \nabla g(A), H \rangle + \frac{1}{2} q_A(H) \\ &= 3 + 2(h^2 + hk + k^2), \end{aligned}$$

ce qu'on peut tout simplement ici vérifier par le calcul... Le minimum atteint en A est donc global. Ainsi f présente sous la contrainte $\mathcal{C}$ un minimum global égal à $g(A) = 3$ atteint au point $(1,1,1)$ mais pas de maximum local.
Remarque. On a décomposé g en somme de carrés :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = 3 + 2\Big(x + \frac{y}{2} - \frac{3}{2}\Big)^2 + \frac{3}{2}(y-1)^2.$$

Exercice 14

Question 1.b

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ avec :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \nabla f(x,y,z) = 2(x,y,z).$$

La contrainte d'égalité linéaire $\mathcal{C} : x + y + z = 3$ définit ici un plan dirigé par le plan vectoriel $\mathcal{H} : x + y + z = 0$.
Les points critiques sous la contrainte $\mathcal{C}$ sont les solutions du système

$$\begin{cases} (x,y,z) \in \mathcal{C} \\ \nabla f(x,y,z) \in \mathcal{H}^\perp \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Il y en a un et un seul : $A = (1,1,1)$, qui est donc l'unique extremum local éventuel de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

En ce point, la hessienne est donnée par $\nabla^2 f(A) = 2I_3$. La forme quadratique associée q_A est définie-positive sur $\mathbb{R}^3$, si bien que pour $H \in \mathcal{H}$ proche de 0,

$$\begin{aligned} f(A+H) - f(A) &= \langle \nabla f(A), H \rangle + \frac{1}{2} q_A(H) + o(\|H\|^2) \\ &= \|H\|^2 + o(\|H\|^2) = \|H\|^2 \left(1 + o(1)\right) \geqslant 0. \end{aligned}$$

La fonction f présente donc un minimum local au point A. Pour justifier que ce minimum est global, on peut faire remarquer que le développement limité au point A de la fonction f, polynomiale de degré 2, obtenu ci-dessus est exact :

$$\begin{aligned} \forall H \in \mathcal{H}, \quad f(A+H) - f(A) &= \|A+H\|^2 - \|A\|^2 \\ &= 2\langle A, H \rangle + \left\|H^2\right\| = \|H\|^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

ou faire appel à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique : en l'appliquant aux vecteurs $(1,1,1)$ et $(x,y,z) \in \mathcal{C}$, il vient :

$$9 = (x+y+z)^2 \leqslant 3(x^2+y^2+z^2) \quad \text{i.e.} \quad 3 = f(A) \leqslant f(x,y,z).$$

Exercice 14

Question 2

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$ avec :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \nabla f(x,y,z) = (2x - 2z, 2z, -2x + 2y + z).$$

La contrainte $\mathcal{C}$ est linéaire : c'est un plan affine dirigé par le plan vectoriel $\mathcal{H}$ d'équation $x - 2y + 2z = 0$.
Les points critiques sous la contrainte $\mathcal{C}$ sont les triplets $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} (x,y,z) \in \mathcal{C} \\ \nabla f(x,y,z) = \lambda(1,-2,2) \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 9 \\ 2x - 2z = \lambda \\ 2z = -2\lambda \\ -2x + 2y + z = 2\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -2 \\ (x,y,z) = \lambda(-\frac{1}{2}, 1, -1) \end{cases}.$$

Il y en a un et un seul : $A = (1,-2,2)$, qui est donc l'unique extremum local éventuel de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

En tout point $X \in \mathbb{R}^3$, la fonction f admet pour matrice hessienne

$$\nabla^2 f(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

qui admet trois valeurs propres -2, 1 et 4, associées à trois droites propres respectivement dirigées par les vecteurs

$$V_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

qui forment une base orthonormale de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
On observe que $\mathcal{H}$ est engendré par les deux vecteurs propres V_2 et V_3, associés à des valeurs propres strictement positives, et orthogonal à V_1. Par suite, en notant q_A la forme hessienne de f au point A,

$$\begin{aligned} \forall H \in \mathcal{H}, \quad q_A(H) &= -2\langle H, V_1 \rangle^2 + \langle H, V_2 \rangle^2 + 4\langle H, V_3 \rangle^2 \\ &\geqslant \langle H, V_1 \rangle^2 + \langle H, V_2 \rangle^2 + \langle H, V_3 \rangle^2 = \|H\|^2 \end{aligned}$$

si bien que, lorsque $H \in \mathcal{H}$ tend vers 0,

$$\begin{aligned} f(A+H) - f(A) &= \langle \nabla f(A), H \rangle + \frac{1}{2} q_A(H) + o(\|H\|^2) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|H\|^2 + o(\|H\|^2) = \|H\|^2 \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Il en ressort que f présente au point A un minimum local sous la contrainte $\mathcal{C}$.
Enfin, ce minimum est global puisque le calcul montre (sans surprise car f est polynomiale de degré 2) que le développement limité précédent est exact :

$$\forall H \in \mathcal{H}, \quad f(A+H) - f(A) = \frac{1}{2} q_A(H) \geqslant 0.$$

Exercice 14

Question 3

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-4, +\infty[$ avec, pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{U}$,

$$\nabla f(x,y,z) = \left(-1 - 3x, -8 + 2y - 3z + \ln(4+z), 7 - 3y + 2z + \frac{y}{4+z}\right)$$

et

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 + \frac{1}{4+z} \\ 0 & -3 + \frac{1}{4+z} & 2 - \frac{y}{(4+z)^2} \end{pmatrix}.$$

Quant à la contrainte $\mathcal{C}$ définie par l'équation $4x - y - z = 7$, elle est linéaire, dirigée par le plan vectoriel $\mathcal{H}$ d'équation $4x - y - z = 0$.

On vérifie que le point $A = (1, 0, -3)$ appartient à la contrainte $\mathcal{C}$ et que le vecteur $\nabla f(A) = (-4, 1, 1)$ est orthogonal à $\mathcal{H}$. Le point A est donc critique sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Remarque. La matrice hessienne

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

admet pour valeurs propres -3, 0 et 4. Les sous-espaces propres associés sont les droites respectivement dirigées par les vecteurs ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Parmi les vecteurs propres de $\nabla^2 f(A)$, seuls les multiples non nuls de ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathcal{H}$, associés à la valeur propre 4, mais

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} \nabla^2 f(A)} \dim \mathcal{H} \cap E_\lambda(\nabla^2 f(A)) = 1 < \dim \mathcal{H}$$

et cela ne suffit donc pas pour décider si f admet au point A un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Pour $X \in \mathcal{C}$, c'est-à-dire $X = A + H$ avec $H = (h, k, \ell) \in \mathcal{H}$, le calcul donne :

$$\begin{aligned} f(A+H) - f(A) &= -4h + k + \ell - \frac{3}{2}h^2 + k^2 - 3k\ell + \ell^2 + k\ln(1+\ell) \\ &= -\frac{3}{2}h^2 + k^2 - 3k\ell + \ell^2 + k\left(\ell - \frac{\ell^2}{2} + o(\ell^2)\right) \\ &= -\frac{3}{2}h^2 + (k-\ell)^2 - \frac{k\ell^2}{2} + o(\|H\|^3) \end{aligned}$$

lorsque $H \to 0$.
Le long du chemin $\gamma : t \longmapsto A + (0, t, t)$, inclus dans $\mathcal{C}$ et passant par A en $t = 0$, on observe donc que

$$f(\gamma(t)) - f(A) = -\frac{t^3}{2} + o(t^3) \sim -\frac{t^3}{2}, \quad t \to 0$$

change de signe en 0. La fonction f ne présente donc pas d'extremum au point A sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Exercice 15

Question 1

Tout d'abord, $\mathcal{K}$ est fermée comme intersection des parties suivantes :

- $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = abc\}$, fermée comme image réciproque du fermé $\{abc\}$ par l'application $(x,y,z) \longmapsto ax + by + cz$, continue sur $\mathbb{R}^3$;
- des trois demi-espaces fermés définis par les inégalités larges $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $z \geqslant 0$.

La partie $\mathcal{K}$ est également bornée car si $(x,y,z) \in \mathcal{K}$, alors

$$0 \leqslant ax \leqslant ax + by + cz = abc$$

d'où $0 \leqslant x \leqslant bc$ et de même $0 \leqslant y \leqslant ac$ et de même $0 \leqslant z \leqslant ab$.

Notons que $\mathcal{K}$ est le triangle plein de sommets $A = (bc, 0, 0)$, $B = (0, ac, 0)$ et $C = (0, 0, ab)$.

Exercice 15

Question 2

La fonction f, continue sur la partie $\mathcal{K}$ fermée, bornée et non vide, admet un minimum m et un maximum M. Il s'agit en fait des extremums de f sur $\mathcal{A} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ sous la contrainte linéaire $\mathcal{P}$. Soient $\mathcal{H} : ax + by + cz = 0$ le sous-espace directeur du plan $\mathcal{P}$ et $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ l'intérieur de $\mathcal{A}$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ avec :

$$\forall (x,y,z) \in \mathcal{U}, \quad \nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy).$$

Les extremums m et M sous la contrainte $\mathcal{P}$ sont atteints sur l'intérieur $\mathcal{U}$ ou sur le bord de $\mathcal{A}$.

- Si l'un d'eux est atteint sur l'intérieur $\mathcal{U}$, c'est en un point critique de f sous la contrainte $\mathcal{P}$. Or, pour $(x,y,z) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{P}$,
$$\nabla f(x,y,z) \in \mathcal{H}^\perp \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} yz = \lambda a \\ xz = \lambda b \\ xy = \lambda c \end{cases}$$
où $\lambda > 0$ car $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$. Cela implique $ax = by = cz$ et plus précisément, comme $ax + by + cz = abc$, $ax = by = cz = \frac{abc}{3}$. Ainsi le seul extremum local éventuel sur $\mathcal{U}$ sous la contrainte $\mathcal{P}$ est en $D = \frac{1}{3}(bc, ac, ab)$, en lequel $f(D) = \frac{a^2b^2c^2}{27}$.
- Le bord de $\mathcal{A}$ est constitué des quarts de plan fermés $\{0\} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \{0\}$ (et les extremums peuvent être atteint sur son intersection avec $\mathcal{P}$, réunion de trois segments d'extremités A, B et C). La fonction f y est identiquement nulle.

En comparant les valeurs de f aux seuls extremums éventuels, on en déduit que f admet le maximum de f sur $\mathcal{K}$ est égal à $M = \frac{a^2b^2c^2}{27}$ et atteint en D. Son minimum est égal à $m = 0$; il est atteint en tout point des segments $[A, B]$, $[B, C]$ et $[C, A]$.

Exercice 16

Question 1

L'ensemble Γ est l'intersection de l'hyperplan d'équation $g(x_1, \dots, x_n) = 1$ (car g est une forme linéaire non nulle) et des n demi-espaces fermés définis par l'une des inéquations $x_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Il est donc fermé comme intersection de fermés.
Il est également borné car $(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma$ implique $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{\alpha_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Dans ces conditions, la fonction continue f admet un maximum μ sur l'ensemble Γ, fermé, borné et non vide.
La fonction f prenant des valeurs strictement positives en certains points de Γ, on a nécessairement $\mu > 0$ ce qui implique que ce maximum est atteint sur $\Gamma \cap]0, +\infty[^n$.

Exercice 16

Question 2

Soit $\mathcal{C}$ la contrainte linéaire $g(x_1, \dots, x_n) = 1$ et $\mathcal{H}$ l'hyperplan vectoriel directeur, d'équation $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$.
La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{U} =]0, +\infty[^n$ avec :

$$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}, \quad \nabla f(X) = f(X)\Big(\frac{\alpha_1}{x_1}, \dots, \frac{\alpha_n}{x_n}\Big).$$

D'après la question **1.**, μ est le maximum de f sur l'ouvert $\mathcal{U}$ sous la contrainte linéaire $\mathcal{C}$. Il est donc atteint en un point critique de f sous la contrainte $\mathcal{C}$. Un tel point $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{C}$ vérifie $\nabla f(X) \in \mathcal{H}^\perp$, i.e.

$$f(X)\Big(\frac{\alpha_1}{x_1}, \dots, \frac{\alpha_n}{x_n}\Big) \in \mathrm{Vect}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

et donc, puisque $f(X) > 0$, $x_1 = \dots = x_n$. Sachant que $\sum_i \alpha_i x_i = 1$ avec $\sum_i \alpha_i = 1$, on en déduit que $x_1 = \dots = x_n = 1$.
D'après la remarque préliminaire, on a donc $\mu = f(1, \dots, 1) = 1$.

Exercice 16

Question 3

L'inégalité est immédiate pour $(x_1, \dots, x_n) = 0$. Pour $(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n \setminus \{0\}$, on pose $\gamma = g(x_1, \dots, x_n) > 0$ et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $c_i = \frac{x_i}{\gamma}$. Le point $C = (c_1, \dots, c_n)$ appartient à Γ et vérifie donc d'après les questions précédentes $f(C) \leqslant 1$. Comme

$$f(C) = \prod_{i=1}^n \Big(\frac{x_i}{\gamma}\Big)^{\alpha_i} = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\gamma^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}} = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)},$$

il en ressort que

$$f(x_1, \dots, x_n) \leqslant g(x_1, \dots, x_n).$$

Exercice 17

Question 1

Une rapide étude de la fonction $\varphi : x \longmapsto x \ln x$ permet d'en dresser le tableau de variations :

x	0	$\mathbf{e}^{-1}$	$+\infty$
φ	$0 \searrow$	$-\mathbf{e}^{-1}$	$\nearrow +\infty$

Il en ressort que la fonction f est minorée sur $\mathcal{D}$: plus précisément, elle admet un minimum égal à $-3\mathbf{e}^{-1}$ atteint en $(\mathbf{e}^{-1}, \mathbf{e}^{-1}, \mathbf{e}^{-1})$.
Elle n'est en revanche pas majorée donc pas bornée puisque par exemple $f(x, 1, 1) = x \ln x \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 17

Question 2

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{D}$ par opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^1$ avec :

$$\forall (x,y,z) \in \mathcal{D}, \quad \nabla f(x,y,z) = (1 + \ln x, 1 + \ln y, 1 + \ln z).$$

Exercice 17
Question 3

Les extremums de g sont les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}_a$. Il s'agit d'une contrainte linéaire dirigée par le plan vectoriel $\mathcal{H}$ d'équation $x+y+z=0$.
Par théorème, si f présente en un point (x,y,z) de l'ouvert $\mathcal{D}$ un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$, alors $\nabla f(x,y,z) \in \mathcal{H}^\perp = \text{Vect}(1,1,1)$, ce qui signifie que

$$1+\ln x = 1+\ln y = 1+\ln z$$

i.e. que $x=y=z$. Conjugué à la condition $(x,y,z)\in\mathcal{C}_a$, cela ne laisse qu'une seule possibilité : $x=y=z=a$.

Exercice 17
Question 4

D'après la question **3.**, le seul extremum éventuel pour g est le point $A=(a,a,a)$.
Réciproquement, on établit grâce à la hessienne de f ou par développement limité direct que pour $H\in\mathcal{H}$, $H\to 0$,

$$g(A+H)-g(A) = \langle \nabla f(A), H\rangle + \frac{1}{2}q_A(H) + o(\|H\|^2)$$
$$= \frac{1}{2a}\|H\|^2 + o(\|H\|^2) = \|H\|^2\left(\frac{1}{2a}+o(1)\right) \geqslant 0$$

d'où l'on déduit que g présente un minimum local au point A.

Il n'est pas surprenant de constater que

$$\min_{\mathcal{C}_a} f = f(A) = 3\varphi(a) \geqslant 3e^{-1} = \min_{\mathcal{D}} f.$$

Exercice 17
Question 5

La contrainte $\mathcal{C}_a$ est explicite : elle définit $z=3a-x-y$ en fonction de $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Étudier les extremums de g revient donc à étudier ceux de

$$h:(x,y)\longmapsto g(x,y,3a-x-y) = x\ln x + y\ln y + (3a-x-y)\ln(3a-x-y)$$

sur le domaine

$$\mathcal{U} = \{(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* : 3a-x-y>0\},$$

ouvert comme intersection de l'ouvert $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ avec le demi-plan ouvert défini par $3a-x-y>0$.
La fonction h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\mathcal{U}$ avec :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \nabla h(x,y) = \big(\ln x - \ln(3a-x-y), \ln y - \ln(3a-x-y)\big).$$

Elle admet $A'=(a,a)$ pour seul point critique, en lequel

$$\nabla^2 h(A') = \frac{1}{a}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r&s\\s&t\end{pmatrix}$$

avec $rt-s^2>0$ et $r>0$. Dans ces conditions, $\nabla^2 h(A')$ admet deux valeurs propres strictement positives donc h présente en A' un minimum local.

Exercice 18
Question 1

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \nabla f(x,y) = 2(x,y).$$

La fonction $\varphi:(x,y)\longmapsto xy$ est également de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \nabla\varphi(x,y) = (y,x).$$

Elle définit une contrainte $\mathcal{C}:\varphi(x,y)=1$ non critique car $\nabla\varphi(x,y)\neq 0$ pour tout $(x,y)\in\mathcal{C}$.
La fonction f présente deux points critiques sous la contrainte φ : $A=(1,1)$ et $B=-A$, seuls extremums locaux sous la contrainte $\mathcal{C}$ éventuels.

Déterminer si f présente un extremum [local] sous la contrainte $\mathcal{C}$ au point A revient à examiner si l'expression

$$f(A+H)-f(A) = (1+h)^2+(1+k)^2-2 = 2h+2k+h^2+k^2$$

garde un signe constant pour $H=(h,k)\in\mathbb{R}^2$ [voisin de 0] tel que $A+H\in\mathcal{C}$, i.e.

$$(1+h)(1+k)=1 \quad\Longleftrightarrow\quad h+k+hk=0.$$

Mais dans ces conditions,

$$f(A+H)-f(A) = -2hk+h^2+k^2 = (h-k)^2 \geqslant 0$$

et f présente donc un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$ au point A.

Par parité de f et symétrie de la contrainte par rapport à l'origine, ce minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$ est aussi atteint au point B.
La fonction f ne présente pas de maximum global sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Exercice 18
Question 2

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \nabla f(x,y) = (3,1).$$

La fonction $\varphi:(x,y)\longmapsto x^2+y^2$ est également de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \nabla\varphi(x,y) = 2(x,y).$$

Elle définit une contrainte $\mathcal{C}:\varphi(x,y)=10$ non critique car $\nabla\varphi(x,y)\neq 0$ pour tout $(x,y)\in\mathcal{C}$.
La fonction f présente deux points critiques sous la contrainte φ : $A=(3,1)$ et $B=-A$, seuls extremums locaux sous la contrainte $\mathcal{C}$ éventuels.

Déterminer si f présente un extremum [local] sous la contrainte $\mathcal{C}$ au point A revient à examiner si l'expression

$$f(A+H)-f(A) = 3(3+h)+1+k-10 = 3h+k$$

garde un signe constant pour $H=(h,k)\in\mathbb{R}^2$ [voisin de 0] tel que $A+H\in\mathcal{C}$, i.e.

$$(3+h)^2+(1+k)^2=10 \quad\Longleftrightarrow\quad 6h+h^2+2k+k^2=0.$$

Mais dans ces conditions,

$$f(A+H)-f(A) = -\frac{h^2+k^2}{2} \leqslant 0$$

et f présente donc un maximum global sous la contrainte $\mathcal{C}$ au point A.

On montre de même que f présente un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$ au point B, ou on utilise l'imparité de f et la symétrie de la contrainte par rapport à l'origine.

Remarques.

- La contrainte $\mathcal{C}$ étant fermée (comme ligne de niveau d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$) et bornée, la fonction f y admet un maximum et un minimum, nécessairement atteints en un point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$. La fin de l'étude précédente n'est donc pas nécessaire.
- On peut aussi conclure avec le lagrangien.

Exercice 18

Question 3

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x,y) = 2(-x,y).$$

La fonction $\varphi : (x,y) \longmapsto \frac{1}{4}x^2 + y^2$ est également de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(x,4y).$$

Elle définit une contrainte $\mathcal{C} : \varphi(x,y) = 1$ non critique car $\nabla\varphi(x,y) \neq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathcal{C}$.
La fonction f présente 4 points critiques sous la contrainte φ : $A = (0,1)$ et $B = -A$, $C = (2,0)$ et $D = -C$, seuls extremums locaux sous la contrainte $\mathcal{C}$ éventuels.

- Pour $H = (h,k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A + H \in \mathcal{C}$, i.e.

$$\frac{h^2}{4} + (1+k)^2 = 1 \quad \iff \quad \frac{h^2}{4} + 2k + k^2 = 0,$$

on a :

$$f(A+H) - f(A) = 2k + k^2 - h^2 = -\frac{5}{4}h^2 \leqslant 0.$$

La fonction f présente donc un maximum global sous la contrainte $\mathcal{C}$ au point A.
Par parité de f et symétrie de la contrainte par rapport à l'origine, ce maximum global sous la contrainte $\mathcal{C}$ est aussi atteint au point B.

- Pour $H = (h,k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $C + H \in \mathcal{C}$, i.e.

$$\frac{1}{4}(2+h)^2 + k^2 = 1 \quad \iff \quad h + \frac{h^2}{4} + k^2 = 0,$$

on a :

$$f(C+H) - f(C) = k^2 - 4h - h^2 = 5k^2 \geqslant 0.$$

La fonction f présente donc un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$ au point C, qui est également atteint au point D par parité.

Exercice 18

Question 4

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U}, \quad \nabla f(x,y) = (-3x^2, 1).$$

La fonction $\varphi : (x,y) \longmapsto x^2 + y^2$ est également de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ avec :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U}, \quad \nabla\varphi(x,y) = (3x^2, 4y^3).$$

Elle définit une contrainte $\mathcal{C} : \varphi(x,y) = 1$ non critique car $\nabla\varphi(x,y) \neq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathcal{C}$.
La fonction f présente un unique point critique sous la contrainte φ : $A = (0,1)$, unique extremum local éventuel sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Pour $H = (h,k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A + H \in \mathcal{U} \cap \mathcal{C}$, i.e. $k > -1$ et $h^3 + (1+k)^4 = 1$, il s'agit de déterminer si l'expression

$$f(A+H) - f(A) = k - h^3 = k - 1 + (1+k)^4$$

garde un signe constant lorsque H est voisin de 0. Or, lorsque $H \to 0$,

$$f(A+H) - f(A) = k - 1 + \big(1 + 4k + o(k)\big) = 5k + o(k) \sim 5k$$

change de signe en 0.
Le point A n'est donc pas un extremum local sous la contrainte $\mathcal{C}$ pour f, qui n'en admet donc aucun.

Exercice 19

Question 1.a

La fonction q_A est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

Exercice 19

Question 1.b

On a :

$$\forall X = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad q_A(X) = {}^tXAX = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}x_ix_j.$$

Pour $k \in [\![1,n]\!]$ et $X = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} q_A(X) &= a_{k,k}x_k^2 + \sum_{i=k, j\neq k} a_{i,j}x_ix_j + \sum_{i\neq k, j=k} a_{i,j}x_ix_j + \sum_{i\neq k, j\neq k} a_{i,j}x_ix_j \\ &= a_{k,k}x_k^2 + 2\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq k}} a_{k,j}x_kx_j + \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq k, j\neq k}} a_{i,j}x_ix_j \end{aligned}$$

d'où

$$\partial_k q_A(X) = 2a_{k,k}x_k + 2\sum_{j\neq k} a_{k,j}x_j = 2\sum_{j=1}^n a_{k,j}x_j.$$

Par suite,

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \nabla q_A(X) = 2AX.$$

Remarque. Si l'on s'autorise à utiliser le théorème de diagonalisabilité des matrices symétriques, on peut mener ce calcul de manière plus subtile.
Soit en effet $\underline{V} = (V_1,\dots,V_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de la matrice A symétrique réelle, respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. En notant $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ les coordonnées d'un vecteur $X = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ dans la base $\underline{V}$, on a

$$X = \sum_{j=1}^n \xi_j V_j \quad \text{et} \quad AX = \sum_{j=1}^n \xi_j AV_j = \sum_{j=1}^n \xi_j\lambda_j V_j$$

d'où, vu l'expression du produit scalaire canonique $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en base orthonormale,

$$q_A(X) = \langle AX, X\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j\xi_j^2.$$

Les coordonnées du gradient $\nabla q_A(X)$ dans la base orthonormale $\underline{V}$ sont alors données par

$$\langle\nabla q_A(X), V_k\rangle = \partial_{V_k} q_A(X) = 2\lambda_k\xi_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

ce qui permet de retrouver

$$\nabla q_A(X) = 2\sum_{k=1}^n \lambda_k\xi_k V_k = 2AX.$$

Exercice 19

Question 2.a

La fonction q_A est continue sur la partie $\mathcal{S}$ fermée, bornée et non vide. Elle y est donc bornée et atteint ses bornes. En d'autres termes, q_A admet un minimum α et un maximum β.

Exercice 19

Question 2.b

Le résultat est clair pour $X = 0$. Pour $X \neq 0$, le vecteur $\frac{1}{\|X\|}X$ appartient à $\mathcal{S}$ d'où, d'après **a.**,

$$\alpha \leqslant q_A\Big(\frac{1}{\|X\|}X\Big) \leqslant \beta$$

i.e., puisque $q_A\big(\frac{1}{\|X\|}X\big) = \frac{1}{\|X\|^2}q_A(X)$,

$$\alpha\,\|X\|^2 \leqslant q_A(X) \leqslant \beta\,\|X\|^2\,.$$

En appliquant cette inégalité à un vecteur X propre pour A associé à une valeur propre λ, on obtient $\alpha\,\|X\|^2 \leqslant \lambda\,\|X\|^2 \leqslant \beta\,\|X\|^2$ d'où $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$ puisque $X \neq 0$. Ainsi les valeurs propres de A appartiennent toutes à $[\alpha, \beta]$.

Remarque. Cette approche permet de justifier, sans passer par les valeurs propres de A, que si la forme quadratique q_A est définie-positive, alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $q_A(X) \geqslant \alpha\,\|X\|^2$. Cette méthode pourra en particulier être intéressante dans le contexte de l'optimisation sous contrainte linéaire.

Exercice 19

Question 2.c

L'ensemble $\mathcal{S}$ définit une contrainte associée à la fonction $\varphi : X \longmapsto \|X\|^2$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ avec $\nabla\varphi(X) = 2X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. La contrainte $\mathcal{S}$ est non critique car $\nabla\varphi(X) \neq 0$ pour $\|X\| = 1$.

Si $X \neq 0$ réalise l'égalité dans l'inégalité $\alpha\,\|X\|^2 \leqslant q_A(X)$, alors q_A présente au point $Y = \frac{1}{\|X\|}X$ un minimum sous la contrainte $\mathcal{S}$. Ce point Y est donc critique sous la contrainte $\mathcal{S}$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla q_A(Y) = \lambda\nabla\varphi(Y)$ i.e. $AY = \lambda Y$ d'après **1.b.**. On a alors $\alpha = q_A(Y) = \lambda$ si bien que le vecteur $X \neq 0$, qui vérifie donc $AX = \alpha X$, est propre pour A associé à la valeur propre α. La réciproque est claire.
On procède de même pour l'autre inégalité.

Exercice 19

Question 2.d

Les réels α et β (éventuellement égaux) sont valeurs propres de A d'après **c.** puisqu'il existe des vecteurs unitaires réalisant chacune des deux égalités d'après **a.**.
Vu l'encadrement des valeurs propres de A établi en **b.**, il en ressort que α et β sont respectivement les plus petite et plus grande valeurs propres de A.