Convergences et approximations en probabilités
Feuille d'exercices

1 En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_0^x \mathbf{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \geqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$$

2 Soit X une variable aléatoire, discrète ou à densité, que l'on suppose bornée. Soit M un réel tel que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad |\mathrm{X}(\omega)| \leqslant \mathrm{M}.$$

1. Justifier que X admet un moment à tout ordre $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que pour tout réel $a > 0$,

$$\frac{\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)-a^2}{\mathrm{M}^2} \leqslant \mathbb{P}(|\mathrm{X}| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|\mathrm{X}|)}{a}.$$

3 ✎ Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la même loi donnée par la densité

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \mathbf{e}^{-(x-\theta)} & \text{si } x \geqslant \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où θ est un paramètre réel. Étudier la convergence en probabilité de la suite de terme général $\mu_n = \min(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

4 ★ Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,1[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Y}_n = \mathrm{X}_n\mathrm{X}_{n+1}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable Y_n, son espérance et sa variance.
2. Discuter l'indépendance de Y_n et Y_m pour $n \neq m \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que la suite de terme général

$$\mathrm{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

converge en probabilité vers la variable certaine égale à p^2.

5 ★
1. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires ayant toutes une variance. On suppose que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mathrm{X}_n) = m \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(\mathrm{X}_n) = 0.$$

Montrer que $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à m.
2. On lance n fois une pièce truquée faisant apparaître pile avec probabilité $p \in \,]0,1[$. On note X_n la variable donnant le nombre de piles obtenus au cours des n lancers et on pose $\mathrm{Y}_n = \mathbf{e}^{\mathrm{X}_n/n}$. Étudier la convergence en probabilité de la suite (Y_n).

6 ♣ On considère $n \geqslant 1$ urnes numérotées de 1 à n et $\mathrm{N} = an$ boules numérotées de 1 à N, où a est un entier non nul. On place au hasard chacune des N boules dans une des n urnes, indépendamment les unes des autres.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on considère la variable aléatoire T_i égale à 1 si l'urne numérotée i est vide et 0 sinon. On note également Y_n le nombre d'urnes vides et $\mathrm{S}_n = \mathrm{Y}_n/n$.

1. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, donner la loi de T_i et préciser son espérance.
2. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, calculer $\mathrm{cov}(\mathrm{T}_i, \mathrm{T}_j)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n)$ et sa limite lorsque $n \to \infty$.
4. Calculer $\mathbb{V}(\mathrm{S}_n)$ et sa limite lorsque $n \to \infty$.
5. **a.** Justifier que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \left|\mathrm{S}_n - \mathbf{e}^{-a}\right| \leqslant |\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)| + \left|\mathbb{E}(\mathrm{S}_n) - \mathbf{e}^{-a}\right|.$$

b. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\mathrm{S}_n - \mathbf{e}^{-a}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

c. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\mathrm{S}_n - \mathbf{e}^{-a}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

d. Interpréter le résultat précédent.

7 Soient (X_n), (Y_n) deux suites de variables aléatoires et X, Y deux variables aléatoires.

1. Montrer que si (X_n) et (Y_n) convergent en probabilité respectivement vers X et Y, alors $\mathrm{X}_n + \mathrm{Y}_n$ converge en probabilité vers $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$.
2. Montrer que si (X_n) converge en probabilité vers X et Y, alors $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$ presque sûrement.

8 **Convergence en moyenne**
Soient (X_n) une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. On dit que (X_n) converge *en moyenne* vers X si, pour tout n assez grand, $|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}|$ admet une espérance et

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}|\right) = 0.$$

1. Montrer que si (X_n) converge en moyenne vers X, alors elle converge en probabilité vers X.
2. Soit $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 1$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{X}_n = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k.$$

a. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_n \neq 0)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
b. En déduire que (X_n) converge en probabilité vers la variable certaine $\mathrm{X} = 0$.
c. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X}_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que (X_n) ne converge pas en moyenne.

✎ : application ♣ : difficile ★ : classique

9 **L'aiguille de Buffon**

★ Un parquet est constitué de lames parallèles de largeur d. On laisse tomber au hasard sur ce parquet une aiguille de longueur $\ell < d$. On note p la probabilité que l'aiguille tombe sur le parquet en chevauchant deux lames.

On répète l'expérience n fois, de manière indépendante, et l'on note X_k la variable aléatoire égale à 1 si, au k-ième lancer, l'aiguille rencontre deux lames de parquet et à 0 sinon. On note alors $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $F_n = Y_n/n$.

1. Justifier l'existence d'un entier n tel que l'intervalle aléatoire $[F_n - 0{,}05 ; F_n + 0{,}05]$ contienne p avec une probabilité supérieure à 0,99.

2. **a.** Déterminer explicitement un entier N_1 à partir duquel la propriété précédente est satisfaite.

b. Déterminer un entier N_2 inférieur à N_1 et vérifiant la même propriété lorsque $\ell = 2{,}2$ cm et $d = 7$ cm, en s'appuyant sur la formule $p = \frac{2\ell}{\pi d} \simeq 0{,}2$ établie par Buffon.

c. Comment affiner encore le résultat ?

10 **Méthode de Monte-Carlo**

On considère une fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(U_k) \qquad \text{et} \qquad I = \int_0^1 g(t)\,dt.$$

1. Que dire de S_n lorsque $n \to \infty$?

2. Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction $g : t \longmapsto \sqrt{1-t^2}$.

a. Écrire une fonction Scilab qui calcule une valeur approchée de $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$ en simulant S_n.

b. Calculer cette intégrale en utilisant le changement de variable $t = \cos x$. Comparer la valeur exacte et la valeur obtenue par simulation avec $n = 1000$.

11 ✎ Soient un réel $\theta > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire X_n suivant une loi géométrique de paramètre $p_n = \theta/n$.

Étudier la convergence en loi de la suite de terme général $Y_n = X_n/n$.

12 ★ Soit $(X_n)_{n\geqslant 2}$ une suite de variables telles que

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{P}\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \quad \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}.$$

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable certaine $X = 0$ alors que $\mathbb{E}(X_n)$ ne converge pas vers $\mathbb{E}(X)$ lorsque $n \to \infty$.

13 ★ On considère des jetons répartis dans deux boîtes A et B. La boîte A contient initialement deux jetons portant chacun le numéro 0 et la boîte B deux jetons portant le numéro 1.

On répète alors l'expérience suivante : on choisit au hasard et simultanément un jeton a de A et un jeton b de B puis on place le jeton a dans la boîte B et le jeton b dans la boîte A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la somme des numéros des jetons contenus dans la boîte A après n échanges.

1. Déterminer les probabilités de transition $p_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_n=j]}(X_{n+1} = i)$ pour $i, j \in \{0,1,2\}$ et $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une limite que l'on déterminera.

14 Soit X une variable aléatoire à densité et à valeurs positives. Montrer que la suite de variables aléatoires de terme général

$$X_n = \frac{\lfloor nX \rfloor}{n}, \quad n \geqslant 1,$$

converge en loi vers X.

15 ✎ Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n = \max(U_1, \ldots, U_n) \quad \text{et} \quad X_n = n(1 - M_n).$$

Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

16 ✎ On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi de Poisson de paramètre 1.

1. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable aléatoire $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

2. Montrer, à l'aide du théorème limite central, que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \leqslant n) = \frac{1}{2}.$$

3. En déduire l'équivalent :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \sim \frac{\mathbf{e}^n}{2}, \quad n \to \infty.$$

17 ✎ Un élève fait en moyenne une faute d'orthographe tous les 500 mots. Donner une valeur approchée de la probabilité de faire plus de 5 fautes dans un devoir de 1500 mots. On donne $\mathbf{e}^{-3} \simeq 0{,}05$.

18 ✎ Le nombre de clients pénétrant dans un magasin pendant une journée suit une loi de Poisson de paramètre 12. On admet que le nombre de clients fréquentant le magasin un jour est indépendant de celui des autres jours.

Donner une valeur approchée de la probabilité d'avoir au moins 250 clients durant un mois de 22 jours ouvrables.

19 ✎ Une entreprise compte 300 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 6 minutes par heure. Quel est le nombre de lignes que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant soit inférieure à 0,025 ?