Endomorphismes et matrices symétriques

Feuille d'exercices

Dans les exercices qui suivent, on note $\mathbf{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbf{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. symétriques définies positives) de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

1 Soient E un espace euclidien et a, b deux vecteurs non nuls de E. Soit φ l'endomorphisme de E défini par $\varphi(x) = x + \langle x, a\rangle\, b$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Montrer que φ est un endomorphisme symétrique si, et seulement si, la famille (a, b) est liée.

2 ✎
1. Justifier que
$$(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2 \longmapsto \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. Vérifier que $\varphi : \mathrm{P} \longmapsto 2\mathrm{XP}' + (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}''$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

3 ★ On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Étant donnée une famille libre (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace vectoriel $\mathrm{H} = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et l'application
$$f : x \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \langle u_1, x\rangle\, u_2 + \langle u_2, x\rangle\, u_1.$$
1. Vérifier que f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. **a.** Montrer que H est stable par f. On note g l'endomorphisme de H induit par f.
   b. Déterminer la matrice représentative de g en base (u_1, u_2).
   c. Vérifier que
   $$\big(\|u_2\|\, u_1 - \|u_1\|\, u_2, \|u_2\|\, u_1 + \|u_1\|\, u_2\big)$$
   est une base orthogonale de H et former la matrice de g dans cette base.
   d. Justifier que f admet une valeur propre $\lambda_1 < 0$, la valeur propre 0 et une valeur propre $\lambda_2 > 0$.

4 ★ Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

5 ✎ Soit $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^t\mathrm{A} = {}^t\mathrm{AA}$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{A}^p = 0$. Montrer que $\mathrm{S} = {}^t\mathrm{AA}$ est nulle puis que $\mathrm{A} = 0$.

6 ✎ Pour chacune des matrices A suivante, déterminer une matrice P inversible telle que ${}^t\mathrm{PAP}$ soit diagonale :

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;
2. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7 On considère les matrices
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
ainsi que les endomorphismes a et b de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associés.
1. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?
2. Calculer A^2 et B^2. En déduire les valeurs propres de A et B.
3. Déterminer les sous-espaces propres de A et B.
4. Montrer qu'il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle les matrices de a et b sont toutes deux diagonales.

8
1. Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer que :
$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$
2. En déduire que si E un espace euclidien rapporté à une base orthonormale $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, alors pour tout projecteur orthogonal p de E, on a :
$$\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \mathrm{rg}\, p.$$

9 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique. Justifier l'existence d'une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la famille $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ soit orthogonale.
Indication. Si A désigne la matrice représentative de f en base canonique, on pourra considérer l'endomorphisme g canoniquement associé à la matrice ${}^t\mathrm{AA}$.

10 ★ Pour $\mathrm{S} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, montrer que :
$$\inf_{\mathrm{X} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{{}^t\mathrm{XSX}}{{}^t\mathrm{XX}} = \min(\mathrm{Sp}\,\mathrm{S}) \qquad \text{et} \qquad \sup_{\mathrm{X} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{{}^t\mathrm{XSX}}{{}^t\mathrm{XX}} = \max(\mathrm{Sp}\,\mathrm{S}),$$
où $\mathrm{Sp}\,\mathrm{S}$ désigne le spectre de S.

11 Soit f endomorphisme symétrique de trace nulle d'un espace euclidien E.
1. Soient $(e_i)_{i=1}^{n}$ une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f et $x = \sum_i e_i$. Montrer que $\langle f(x), x\rangle = 0$.
2. En déduire par récurrence l'existence d'une base orthonormale de E dans laquelle f est représenté par une matrice de coefficients diagonaux tous nuls.

12 ★
1. **a.** Montrer qu'une matrice $\mathrm{M} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique est positive (resp. définie-positive) si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

b. En déduire que si M est une matrice symétrique positive inversible de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, alors la matrice M^{-1} est symétrique positive.

2. Soit M une matrice symétrique positive de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Justifier qu'on peut écrire $\mathrm{M} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{X}_i {}^t\mathrm{X}_i$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels positifs ou nuls et $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ des matrices colonnes formant une base orthonormale de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b. Montrer que la matrice $\mathrm{L} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} \mathrm{X}_i {}^t\mathrm{X}_i$ est symétrique positive et vérifie la relation $\mathrm{L}^2 = \mathrm{M}$. On admet que L est la seule matrice symétrique positive de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{L}^2 = \mathrm{M}$ et on la note $\sqrt{\mathrm{M}}$.

c. Montrer que si M est de plus inversible, alors $\sqrt{\mathrm{M}}^{-1} = \sqrt{\mathrm{M}^{-1}}$.

13 ♣ Soient E un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Un endomorphisme f de E est appelé *contraction* si pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

1. Donner un exemple de contraction.

2. On suppose dans cette question que l'endomorphisme f est symétrique.

a. Montrer que f est une contraction si, et seulement si, pour toute valeur propre λ de f, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

b. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|\mathrm{P}(f)(x)\| \leqslant \Big(\sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} |\mathrm{P}(\lambda)| \Big) \|x\|$$

où $\mathrm{Sp}(f)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de f.

3. On suppose désormais que f est un endomorphisme inversible de E et on note M sa matrice représentative dans une base $\underline{e}$ de E.

a. Montrer que ${}^t\mathrm{M}\mathrm{M}$ est une matrice symétrique définie-positive. En déduire qu'il existe une matrice S symétrique définie-positive telle que ${}^t\mathrm{M}\mathrm{M} = \mathrm{S}^2$.

b. Montrer qu'il existe une matrice $\Omega \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $\mathrm{M} = \Omega\mathrm{S}$.

c. Justifier l'unicité du couple (Ω, S) formé d'une matrice Ω orthogonale et d'une matrice S symétrique définie-positive telles que $\mathrm{M} = \Omega\mathrm{S}$.
Indication. Si (Ω_1, S_1) et (Ω_2, S_2) conviennent, on pourra montrer que S_1 et S_2 ont les mêmes vecteurs propres associés aux mêmes valeurs propres.

d. Montrer que f est une contraction si, et seulement si, pour toute valeur propre λ de S, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

14 ★ Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on pose

$$\varphi(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{n} \Big(\int_0^1 \mathrm{P}(t) t^k \,\mathrm{d}t \Big) \mathrm{X}^k.$$

1. a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

b. Déterminer $\operatorname{Ker} \varphi$.

2. a. Écrire la matrice M de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Justifier que M est diagonalisable.

b. Pour $\mathrm{U} = {}^t\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, montrer que

$${}^t\mathrm{U}\mathrm{M}\mathrm{U} = \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n} u_k t^k \Big)^2 \mathrm{d}t.$$

3. En déduire que toutes les valeurs propres de φ sont strictement positives.

4. En utilisant la trace, montrer que la plus petite valeur propre de φ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.

15 ★ **1.** Soit f endomorphisme symétrique positif d'un espace euclidien E. Montrer qu'un vecteur $x \in \mathrm{E}$ appartient au noyau de f si, et seulement si, $\langle x, f(x) \rangle = 0$.

2. Soient $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathbf{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que ${}^t\mathrm{A}\mathrm{S}\mathrm{A} = 0$. Montrer que $\operatorname{Im} \mathrm{A} \subset \operatorname{Ker} \mathrm{S}$.

16 Soient $\mathrm{S} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie-positive et $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que la forme quadratique canoniquement associée à A est nulle.

2. En déduire que la matrice $\mathrm{S} + \mathrm{A}$ est inversible.

17 ✎ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère la forme bilinéaire φ_a canoniquement associée à la matrice

$$\mathrm{M}_a = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ a & 3 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\mathrm{M}_a \mathrm{U}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, où

$$\mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire deux matrices D_a diagonale et P inversible telles que $\mathrm{M}_a = \mathrm{P}\mathrm{D}_a\mathrm{P}^{-1}$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que φ_a soit un produit scalaire. Déterminer alors une base orthonormale pour ce produit scalaire.

18 ✎ Les formes quadratiques ci-dessous sont-elles positives ? définies-positives ? Déterminer l'endomorphisme symétrique associé.

1. $q_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto 2x^2 - 2y^2 + 3xy$;

2. $q_2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - xz$.

19 ♣ **Transformation de Legendre**

Pour $n \geqslant 1$ donné, on travaille dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, sur lequel on considère une forme quadratique définie-positive f.

1. Pour $p \in \mathbb{R}^n$ donné, on considère l'application

$$\mathrm{F} : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \langle p, x \rangle - f(x).$$

a. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, et des réels $q_1, \ldots, q_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées $y_1, \ldots, y_n$ en base $\underline{e}$, on ait :

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{i=1}^{n} (q_i y_i - \lambda_i y_i^2).$$

b. Montrer que la fonction F est majorée sur $\mathbb{R}^n$ et atteint sa borne supérieure.

On définit alors l'application $\mathrm{L}(f) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, appelée *transformée de Legendre* de f, par :

$$\mathrm{L}(f) : p \longmapsto \max_{x \in \mathbb{R}^n} \big(\langle p, x\rangle - f(x)\big).$$

2. **a.** Montrer que $\mathrm{L}(f)$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer la matrice symétrique associée.

b. Que vaut $\mathrm{L}\big(\mathrm{L}(f)\big)$?