

**Travaux dirigés**  
Endomorphismes et matrices symétriques

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2017/2018

www.rbd.fr      Travaux dirigés      Année 2017/2018      1 / 1

Exercice 1

On commence par calculer, pour  $x, y \in E$ ,

$$\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x + \langle x, a \rangle b, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, a \rangle \langle b, y \rangle$$

- Si la famille  $(a, b)$  est liée, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $b = \lambda a$  (car  $a \neq 0$ ) et l'expression précédente de  $\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, a \rangle \langle y, a \rangle$  étant alors symétrique en  $x, y$ , l'endomorphisme  $\varphi$  est symétrique.
- Réciproquement, si  $\varphi$  est symétrique, alors l'égalité  $\langle \varphi(a), b \rangle = \langle a, \varphi(b) \rangle$  s'écrit :
 
$$\langle a, b \rangle + \|a\|^2 \|b\|^2 = \langle a, b \rangle + \langle a, b \rangle^2$$
 ou encore  $\langle a, b \rangle^2 = \|a\|^2 \|b\|^2$  et traduit donc l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui implique que la famille  $(a, b)$  est liée.

www.rbd.fr      Travaux dirigés      Année 2017/2018      2 / 1

Exercice 2      Q 1

**Exercice 2**  
Question 1

L'application est clairement bilinéaire et symétrique. De plus, pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 P(t)^2 dt \geq 0$$

et, si l'égalité est réalisée, alors la fonction  $t \mapsto P(t)^2$ , continue et positive, est identiquement nulle sur  $[-1, 1]$ ; cela fait une infinité de racines pour le polynôme  $P$ , qui est donc nul. Ainsi l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est définie-positive et constitue donc un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

www.rbd.fr      Travaux dirigés      Année 2017/2018      3 / 1

Exercice 2      Q 2

**Exercice 2**  
Question 2

Pour  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ , une intégration par parties en dérivant  $t \mapsto Q(t)$  et en primitivant  $t \mapsto 2tP'(t) + (t^2 - 1)P''(t)$  montre que :

$$\begin{aligned} \langle \varphi(P), Q \rangle &= \int_{-1}^1 (2tP'(t) + (t^2 - 1)P''(t)) Q(t) dt \\ &= [(t^2 - 1)P'(t)Q(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t) dt \\ &= - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t) dt \end{aligned}$$

présente une expression symétrique en  $P, Q$  et l'endomorphisme  $\varphi$  est donc symétrique.

www.rbd.fr      Travaux dirigés      Année 2017/2018      4 / 1

Exercice 3      Q 1

**Exercice 3**  
Question 1

L'application  $f$  est définie de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ , linéaire par bilinéarité du produit scalaire, c'est donc un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

Par ailleurs pour  $x, y \in E$ , l'expression

$$\begin{aligned} \langle f(x), y \rangle &= \langle \langle u_1, x \rangle u_2 + \langle u_2, x \rangle u_1, y \rangle \\ &= \langle u_1, x \rangle \langle u_2, y \rangle + \langle u_2, x \rangle \langle u_1, y \rangle \end{aligned}$$

est symétrique en  $x, y$ . On a donc  $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$  et l'endomorphisme  $f$  est symétrique.

www.rbd.fr      Travaux dirigés      Année 2017/2018      5 / 1

Exercice 3      Q 2

**Exercice 3**  
Question 2

**Noyau de  $f$**   
Pour  $x \in E$ , on a :

$$f(x) = 0 \iff \langle u_1, x \rangle u_2 + \langle u_2, x \rangle u_1 = 0 \iff \begin{cases} \langle u_1, x \rangle = 0 \\ \langle u_2, x \rangle = 0 \end{cases}$$

car la famille  $(u_1, u_2)$  est libre. Ainsi  $\text{Ker } f = H^\perp$ .

**Image de  $f$**   
Par ailleurs, on remarque immédiatement sur la définition de  $f$  que  $\text{Im } f \subset H$ . En ajoutant d'après le théorème du rang que :

$$\dim \text{Im } f = \dim E - \dim \text{Ker } f = \dim E - \dim H^\perp = \dim H,$$

l'inclusion précédente est donc une égalité :  $\text{Im } f = H$ .

www.rbd.fr      Travaux dirigés      Année 2017/2018      6 / 1

Exercice 3      Q 3.a

**Exercice 3**  
Question 3.a

On a bien sûr  $f(H) \subset \text{Im } f = H$ . Le sous-espace vectoriel  $H$  est donc stable par  $f$ , qui induit donc sur  $H$  un endomorphisme

$$g : H \rightarrow H, x \mapsto f(x).$$

www.rbd.fr      Travaux dirigés      Année 2017/2018      7 / 1

Exercice 3      Q 3.b

**Exercice 3**  
Question 3.b

Le calcul donne immédiatement

$$g(u_1) = \|u_1\|^2 u_2 + \langle u_2, u_1 \rangle u_1$$

et

$$g(u_2) = \langle u_1, u_2 \rangle u_2 + \|u_2\|^2 u_1$$

d'où l'on déduit la matrice représentative de  $g$  en base  $(u_1, u_2)$  :

$$\begin{pmatrix} \langle u_2, u_1 \rangle & \|u_2\|^2 \\ \|u_1\|^2 & \langle u_1, u_2 \rangle \end{pmatrix}.$$

www.rbd.fr      Travaux dirigés      Année 2017/2018      8 / 1

Exercice 3  
Question 3.c

Soient

$$v_1 = \|u_2\| u_1 - \|u_1\| u_2 \quad \text{et} \quad v_2 = \|u_2\| u_1 + \|u_1\| u_2.$$

- Par identité remarquable,
 
$$\langle v_1, v_2 \rangle = \| \|u_2\| u_1 \|^2 - \| \|u_1\| u_2 \|^2 = \|u_2\|^2 \|u_1\|^2 - \|u_1\|^2 \|u_2\|^2 = 0.$$
- Ainsi la famille  $(v_1, v_2)$  est orthogonale formée de vecteurs non nuls (car  $(u_1, u_2)$  est libre) donc libre. Formée de deux vecteurs de l'espace  $H$  de dimension 2, c'en est donc une base orthogonale.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 9 / 1

Exercice 3  
Q 3.c

Le calcul donne :

$$g(v_1) = \|u_2\| f(u_1) - \|u_1\| f(u_2) = \langle (u_1, u_2) - \|u_1\| \|u_2\| \rangle v_1$$

et de même

$$g(v_2) = (\|u_2, u_1\| + \|u_1\| \|u_2\|) v_2.$$

L'endomorphisme  $g$  est donc représenté en base  $(v_1, v_2)$  par la matrice

$$\begin{pmatrix} \langle (u_1, u_2) - \|u_1\| \|u_2\| \rangle & 0 \\ 0 & \langle (u_1, u_2) + \|u_1\| \|u_2\| \rangle \end{pmatrix}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 10 / 1

Exercice 3  
Question 3.d

D'après la question précédente, l'endomorphisme  $g$  présente deux valeurs propres

$$\langle (u_1, u_2) - \|u_1\| \|u_2\| \rangle \quad \text{et} \quad \langle (u_1, u_2) + \|u_1\| \|u_2\| \rangle,$$

qui sont donc également valeurs propres de  $f$ . Parmi elles, l'une est strictement positive et l'autre strictement négative; en effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui est stricte puisque la famille  $(u_1, u_2)$  est libre, on a :

$$|\langle (u_1, u_2) \rangle| < \|u_1\| \|u_2\|.$$

Par ailleurs, 0 est également valeur propre puisque  $\text{Ker } f = H^\perp \neq \{0\}$ . L'espace  $\mathbb{R}^3$  étant de dimension 3, l'endomorphisme  $f$  présente donc exactement trois valeurs propres dont une strictement négative, une nulle et une strictement positive.

*Remarque.* La même conclusion vaut encore pour le même endomorphisme d'un espace euclidien  $E$  de dimension supérieure ou égale à 3.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 11 / 1

Exercice 4

- Les sous-espaces  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont orthogonaux. En effet, pour  $x \in \text{Ker } f$  et  $y \in \text{Im } f$ , il existe  $z \in E$  tel que  $y = f(z)$  et alors, puisque  $f$  est symétrique,
 
$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(z) \rangle = \langle f(x), z \rangle = \langle 0, z \rangle = 0.$$
- La somme  $\text{Ker } f + \text{Im } f$ , orthogonale comme on vient de le voir, est donc directe. De plus, le théorème du rang assure que
 
$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E,$$
 et les sous-espaces vectoriels  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont donc supplémentaires orthogonaux.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 12 / 1

Exercice 5

Par hypothèse, le polynôme  $X^p$  annule  $A$ . La matrice  $A$  admet donc pour seule valeur propre éventuelle 0. Mais cela ne suffit pas pour en déduire que  $A = 0$ ; contre-exemple ?

Concernant  $S$ , on a tout d'abord  $S^p = ({}^tAA)^p = {}^tA^pA^p = 0$  car  $A$  commute avec  ${}^tA$  et  $A^p = 0$  par hypothèse.

Ainsi  $S$  est nilpotent comme  $A$  donc admet 0 comme seule valeur propre éventuelle. Mais  $S$  est de plus symétrique réelle donc diagonalisable. Elle est donc semblable à la matrice nulle donc elle-même nulle.

On a alors, en considérant la structure euclidienne canonique sur  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ ,

$$\|A\|^2 = \text{tr}({}^tAA) = \text{tr } S = 0,$$

d'où l'on déduit que  $A = 0$ .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 13 / 1

Exercice 6  
Question 1

La matrice  $A$  est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable avec des sous-espaces propres supplémentaires orthogonaux. On en détermine les valeurs propres : pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda I_4) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 - \lambda & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 5\lambda + 2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{L_1 \leftrightarrow -2L_1 + (2-\lambda)L_2}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 - 5\lambda + 2 & 2\lambda - 4 & 0 \\ -2 & 3 - \lambda & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 5\lambda + 2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{L_1 \leftrightarrow -(4-\lambda)L_1 - (2\lambda-4)L_2}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ -2 & 3 - \lambda & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 5\lambda + 2 \end{pmatrix} \quad \text{si } \lambda \neq 4 \end{aligned}$$

(en gras les coefficients « diagonaux »), où

$$\alpha = -\lambda(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = -\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 6).$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 14 / 1

Exercice 6  
Q 1

On observe ainsi que  $\text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$  lorsque  $\lambda$  vaut 0, 3 ou 6, qui sont donc les trois valeurs propres de  $A$  (qui ne peut en admettre plus : inutile de revenir sur le cas  $\lambda = 4$ ). La matrice  $A$  admet donc trois droites propres que l'on détermine en résolvant les systèmes linéaires correspondants, en réinvestissant les calculs précédents (c'est-à-dire en appliquant aux équations du système  $AX = \lambda X$  les mêmes opérations qu'aux lignes de la matrice  $A - \lambda I_3$ ).

Par exemple, pour  $X = {}^t(x \ y \ z) \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ,

$$AX = 0 \iff \begin{cases} -2x + 3y - 2z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = 2z \end{cases}.$$

On obtient ainsi les droites propres :

- dirigée par  $V_1 = {}^t(2 \ 2 \ 1)$  pour la valeur propre 0;
- dirigée par  $V_2 = {}^t(-2 \ 1 \ 2)$  pour la valeur propre 3;
- dirigée par  $V_3 = {}^t(1 \ -2 \ 2)$  pour la valeur propre 6.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 15 / 1

Exercice 6  
Q 1

La famille  $(V_1, V_2, V_3)$  est automatiquement orthogonale car les vecteurs  $V_i$  dirigent les trois droites propres qui sont deux-à-deux orthogonales puisque  $A$  est symétrique. En normalisant les vecteurs  $V_i$ , on obtient donc une base orthonormale  $(W_1, W_2, W_3)$  de  $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $A$ . La matrice de passage

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

de la base canonique à la base  $(W_1, W_2, W_3)$  est donc orthogonale et vérifie, d'après la formule de changement de base appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  :

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 16 / 1

Exercice 6 Q 2

### Exercice 6

Question 2

La matrice  $A$  est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable avec des sous-espaces propres supplémentaires orthogonaux. Il est possible d'en déterminer les valeurs propres classiquement : pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{rg}(A - \lambda I_4) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + (1-\lambda)L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4}}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda & -\lambda & \lambda^2 - 2\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{L_1 \leftarrow -L_1 + 2L_2 - L_3}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda - 7) \\ 0 & -\lambda & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 17 / 1

Exercice 6 Q 2

$$\text{rg}(A - \lambda I_4) \stackrel{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda - 7) \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & -2\lambda \\ -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{cases} 4 & \text{si } \lambda \notin \{0, 7\} \\ 3 & \text{si } \lambda = 7 \\ 1 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

Mais il est plus rapide de remarquer que  $\text{rg } A = 1$  si bien que 0 est valeur propre avec, d'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ , un sous-espace propre de dimension  $\dim E_0(A) = 4 - \text{rg } A = 3$ . La matrice  $A$  étant par ailleurs diagonalisable, elle est donc semblable à une matrice  $D = \text{diag}(0, 0, 0, \lambda)$ , où  $\lambda$  est la dernière valeur propre de  $A$ . Les matrices  $A$  et  $D$ , semblables, ont la même trace, ce qui donne la valeur de  $\lambda = \text{tr } A = 7$ .

La matrice  $A$  admet donc deux valeurs propres :

- la valeur propre 0, avec pour sous-espace propre l'hyperplan d'équation  $x + 2y - z - t = 0$ .  
Pour construire une base orthonormale de  $E_0(A)$ , on en détermine une base à laquelle on applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 18 / 1

Exercice 6 Q 2

Partant de la base formée des vecteurs

$$U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

on obtient tout d'abord une base orthogonale en posant  $W_1 = U_1$  avec  $\|W_1\| = \sqrt{5}$  puis (étant donné que  $U_1 \perp U_2$ )  $W_2 = U_2$  avec  $\|W_2\| = \sqrt{2}$  et

$$W_3 = U_3 - \frac{\langle W_1, U_3 \rangle}{\|W_1\|^2} W_1 - \frac{\langle W_2, U_3 \rangle}{\|W_2\|^2} W_2 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

avec  $\|W_3\| = \sqrt{\frac{7}{10}}$ .

En normalisant ces vecteurs, on obtient une base orthonormale  $(V_1, V_2, V_3)$  de  $E_0(A)$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 19 / 1

Exercice 6 Q 2

- la valeur propre 7, avec pour sous-espace propre la droite dirigée par le vecteur  ${}^t(1 \ 2 \ -1 \ -1)$  normal à  $E_0(A)$ .  
Le vecteur

$$V_4 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

constitue une base orthonormale de la droite  $E_7(A)$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 20 / 1

Exercice 6 Q 2

Les sous-espaces propres de  $A$  étant supplémentaires orthogonaux, la famille  $(V_1, V_2, V_3, V_4)$  ainsi construite est une base orthonormale de  $\mathbf{M}_{4,1}(\mathbb{R})$  formée de colonnes propres de  $A$ . La formule de changement de base appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  donne donc :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

où la matrice

$$P = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{14} & 0 & 2 & \sqrt{10} \\ -\sqrt{14} & 0 & 4 & 2\sqrt{10} \\ 0 & \sqrt{35} & 5 & -\sqrt{10} \\ 0 & -\sqrt{35} & 5 & -\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

est orthogonale comme matrice de passage entre deux bases orthonormales.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 21 / 1

Exercice 7 Q 1

### Exercice 7

Question 1

Les matrices  $A$  et  $B$  sont symétriques réelles donc diagonalisables. On peut ajouter que les sous-espaces propres de chacune d'elles sont supplémentaires orthogonaux dans  $\mathbf{M}_{4,1}(\mathbb{R})$  euclidien canonique.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 22 / 1

Exercice 7 Q 2

### Exercice 7

Question 2

- Le calcul donne  $A^2 = 4A$ . Ainsi le polynôme  $X^2 - 4X = X(X - 4)$  est annulateur de  $A$ . Ses racines 0 et 4 sont donc les seules valeurs propres éventuelles de  $A$ .  
La matrice  $A$  étant diagonalisable mais non diagonale, elle admet au moins deux valeurs propres. Les deux réels 0 et 4 sont donc tous deux valeurs propres de  $A$ .  
La matrice  $A$  admet donc 0 et 4 pour valeurs propres.
- On raisonne de même sur la matrice  $B$  qui vérifie  $B^2 = 2B$  et admet 0 et 2 pour valeurs propres.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 23 / 1

Exercice 7 Q 3

### Exercice 7

Question 3

**Sous-espaces propres de la matrice  $A$**

- pour la valeur propre 0 : l'hyperplan d'équation  $x + y + z + t = 0$ ;
- pour la valeur propre 4 :  $E_4(A) = E_0(A)^\perp$ , i.e. la droite dirigée par  ${}^t(1 \ 1 \ 1 \ 1)$ .

**Sous-espaces propres de la matrice  $B$**

- pour la valeur propre 0 : le sous-espace de dimension 2 de base formée par les vecteurs  ${}^t(1 \ 0 \ 1 \ 0)$  et  ${}^t(0 \ 1 \ 0 \ 1)$ ;
- pour la valeur propre 2 : le sous-espace de dimension 2 de base formée par les vecteurs  ${}^t(1 \ 0 \ -1 \ 0)$  et  ${}^t(0 \ 1 \ 0 \ -1)$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 24 / 1

Exercice 7 Q 4

### Exercice 7

Question 4

On étudie les intersections d'un sous-espace propre de  $A$  avec un sous-espace propre de  $B$  :

- $E_4(A) \cap E_0(B) = E_4(A)$  est la droite dirigée par  $u_1 = {}^t(1 \ 1 \ 1 \ 1)$  ;
- $E_4(A) \cap E_2(B) = \{0\}$  ;
- $E_0(A) \cap E_2(B) = E_2(B)$  est le plan dirigé par les vecteurs  $u_2 = {}^t(1 \ 0 \ -1 \ 0)$  et  $u_3 = {}^t(0 \ 1 \ 0 \ -1)$  ;
- $E_0(A) \cap E_0(B)$  est la droite dirigée par  $u_4 = {}^t(1 \ -1 \ 1 \ -1)$ .

Les quatre vecteurs  $u_1, u_2, u_3, u_4$  ainsi obtenus sont propres pour  $a$  et  $b$ . Par ailleurs, les intersections précédentes sont deux-à-deux orthogonales puisqu'il en va ainsi des sous-espaces propres de  $A$  (resp. de  $B$ ). Comme de plus (coup de bol!)  $u_2$  et  $u_3$  sont orthogonaux, la famille  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  est orthogonale.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 25 / 1

Exercice 7 Q 4

Après normalisation, on obtient quatre vecteurs

$$e_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0),$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1), \quad e_4 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$$

formant une base  $\underline{e}$  orthonormale de  $\mathbb{R}^4$ . Ces vecteurs étant propres pour les endomorphismes  $a$  et  $b$ , ceux-ci sont représentés en base  $\underline{e}$  par les matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 26 / 1

Exercice 8 Q 1

### Exercice 8

Question 1

La matrice  $A$  est symétrique réelle donc diagonalisable : il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = D.$$

On a alors  $A = PDP^{-1}$  d'où  $A^2 = PD^2P^{-1}$  et, puisque deux matrices semblables ont même trace,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = \|A\|^2 = \text{tr}(A^2) = \text{tr}(D^2) = \text{tr}(D^2) = \|D\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 27 / 1

Exercice 8 Q 2

### Exercice 8

Question 2

L'endomorphisme symétrique  $p$  est représenté en base orthonormale  $\underline{e}$  par une matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  symétrique de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  où  $\lambda_i = 1$  pour tout  $i \leq r = \text{rg } p$  et  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i > r$ . En effet, dans une base adaptée à la décomposition  $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ , le projecteur  $p$  est représenté par la matrice par blocs  $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Par ailleurs, la norme du vecteur  $p(e_j)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , est donnée par ses coordonnées  $a_{1j}, \dots, a_{nj}$  en base orthonormale  $\underline{e}$  :

$$\forall j \in [1, n], \quad \|p(e_j)\|^2 = \sum_{i=1}^n a_{ij}^2.$$

Le résultat de la question 1. donne alors :

$$\sum_{j=1}^n \|p(e_j)\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = r = \text{rg } p.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 28 / 1

Exercice 9

### Exercice 9

Pour  $x, y \in \mathbb{R}^n$  et  $X, Y$  les matrices colonnes qui leur sont canoniquement associées, on a :

$$\langle f(x), f(y) \rangle = {}^t(AX)AY = {}^tX'AA'Y = \langle x, g(y) \rangle.$$

L'endomorphisme  $g$  étant représenté en base canonique, orthonormale, par la matrice symétrique  ${}^tAA'$ , c'est un endomorphisme symétrique de  $\mathbb{R}^n$ . À ce titre, il est diagonalisable en base orthonormale : il existe une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $g$ . En notant  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres associées, on a alors d'après le calcul préliminaire :

$$\forall i \neq j \in [1, n], \quad \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, g(e_j) \rangle = \langle e_i, \lambda_j e_j \rangle = \lambda_j \langle e_i, e_j \rangle = 0,$$

si bien que la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est orthogonale.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 29 / 1

Exercice 10

### Exercice 10

Remarque. La forme quadratique

$$q : X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto {}^tXSX = \sum_{1 \leq i, j \leq n} s_{ij}x_i x_j$$

est continue par opérations sur les fonctions continues.

Par ailleurs,

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \frac{1}{\|X\|^2} q(X) = q\left(\frac{X}{\|X\|}\right)$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne canonique sur  $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Il s'agit donc d'étudier  $q$  sur la sphère unité  $S = \{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \|X\| = 1\}$ . Cette partie étant fermée (comme image réciproque du fermé  $\{1\}$  par l'application continue  $X \mapsto \|X\|$ ), bornée et non vide, la fonction continue  $q$  y est bornée et atteint ses bornes, ce qui justifie l'existence de

$$\sup_{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \max_{X \in S} q(X).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 30 / 1

Exercice 10

La matrice  $S$  étant symétrique réelle, elle est diagonalisable. Plus précisément, il existe deux matrices  $P$  orthogonale et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  diagonale de  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $P^{-1}SP = D$ , où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont les valeurs propres de  $S$ . Quitte à réordonner les colonnes  $C_1, \dots, C_n$  de  $P$ , on peut supposer  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ .

Pour  $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  non nul et  $Y = {}^tPX$ , on a alors

$${}^tXSX = {}^tXPD^{-1}X = {}^t(PX)D^{-1}PX = {}^tYDY,$$

puisque  $P$  est orthogonale. On a de même :

$${}^tXX = {}^t(PY)(PY) = {}^tY(PP)Y = {}^tYY.$$

En s'appuyant sur la norme euclidienne canonique sur  $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on remarque enfin que  $X \neq 0$  implique  ${}^tXX = \|X\|^2 > 0$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 31 / 1

Exercice 10

En notant  $Y = {}^t(y_1 \ \dots \ y_n)$ , il vient :

$${}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n y_i^2 = \lambda_n {}^tYY$$

d'où :

$$\frac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \frac{{}^tYDY}{{}^tYY} \leq \lambda_n,$$

avec égalité pour  $Y$  le  $n$ -ième vecteur de la base canonique, c'est-à-dire pour  $X = C_n$ .

Il en résulte que :

$$\sup_{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} \leq \lambda_n = \max(\text{Sp } S)$$

et l'on montrerait de même que :

$$\inf_{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \lambda_1 = \min(\text{Sp } S)$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 32 / 1

Exercice 12 Q 1.a

### Exercice 12

Question 1.a

On justifie seulement, pour  $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  symétrique, l'équivalence :  $M$  est définie-positive si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

On suppose  $M$  définie-positive :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad {}^tXMX > 0.$$

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $M$ . Il existe  $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  tel que  $MX = \lambda X$ . On a alors  ${}^tXMX = \lambda {}^tXX$  d'où

$$\lambda = \frac{{}^tXMX}{{}^tXX} > 0$$

car  ${}^tXX = \|X\|^2 > 0$  où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne canonique sur  $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 33 / 1

Exercice 12 Q 1.a

Réciproquement, on suppose les valeurs propres de  $M$  strictement positives.

Comme  $M$  est symétrique réelle, il existe alors une matrice  $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  orthogonale telle que  $P^{-1}MP = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  soit diagonale, où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont les valeurs propres de  $M$ , strictement positives par hypothèse. Pour  $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $Y = {}^tPX = (y_1 \ \dots \ y_n)$ , on a alors

$${}^tXMX = {}^tXPD^tPX = ({}^tPX)D^tPX = {}^tYDY.$$

Si  $X \neq 0$ , alors  $Y \neq 0$  (car  $P$  inversible) donc il existe  $i_0$  tel que  $y_{i_0} \neq 0$  si bien, comme  $\lambda_i > 0$  pour tout  $i$ , que

$${}^tXMX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq \lambda_{i_0} y_{i_0}^2 > 0$$

et  $M$  est définie-positive.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 34 / 1

Exercice 12 Q 1.b

### Exercice 12

Question 1.b

Sachant que 0 est valeur propre d'une matrice si, et seulement si, cette matrice n'est pas inversible, on déduit de la question a. qu'une matrice symétrique est positive inversible si, et seulement si, elle est définie-positive.

Si  $M$  symétrique est définie-positive, alors il existe  $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$P^{-1}MP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

pour des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ .  
On a alors

$$M^{-1} = P \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right) P^{-1}$$

si bien que la matrice  $M^{-1}$  admet pour valeurs propres  $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ , toutes strictement positives. Elle est donc symétrique (vérification facile) définie-positive.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 35 / 1

Exercice 12 Q 2.a

### Exercice 12

Question 2.a

Puisque  $M$  est symétrique réelle, il existe une base orthonormale  $(X_1, \dots, X_n)$  de  $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $M$ . En notant  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres associées, toutes positives ou nulles d'après 1.a. puisque  $M$  est positive, on a alors :

$$M = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i {}^tX_i.$$

*Remarque.* Si  $P$  désigne la matrice de passage de la base canonique à la base  $(X_1, \dots, X_n)$ , orthogonale car les deux bases sont orthonormales, la formule précédente équivaut à :

$$M = PD^tP \quad \text{où} \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 36 / 1

Exercice 12 Q 2.b

### Exercice 12

Question 2.b

On a tout d'abord

$${}^tL = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} ({}^tX_i) {}^tX_i = L$$

donc  $L$  est symétrique puis, pour  $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$${}^tX LX = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} ({}^tX X_i) ({}^tX_i X) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} \langle X, X_i \rangle^2 \geq 0$$

où l'on a noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire canonique sur  $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , donc  $L$  est positive. Enfin,

$$L^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} X_i ({}^tX_i X_j) {}^tX_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \langle X_i, X_j \rangle X_i {}^tX_j$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i {}^tX_i = M$$

car la famille  $(X_1, \dots, X_n)$  est orthonormale.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 37 / 1

Exercice 12 Q 2.b

*Remarque.* La formule définissant  $L$  est équivalente à la formule ci-dessous, sur laquelle on aurait pu retrouver le résultat :

$$L = P\Delta^tP \quad \text{où} \quad \Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).$$

En effet, la formule ci-dessus donne immédiatement  ${}^tL = L$  et montre que  $L$  admet pour valeurs propres  $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ , toutes positives. Enfin,

$$L^2 = P\Delta^tPP\Delta^tP = P\Delta^2P = PD^tP = M$$

puisque  $P$  est orthogonale.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 38 / 1

Exercice 12 Q 2.c

### Exercice 12

Question 2.c

Tout d'abord la matrice  $\sqrt{M}$  est inversible : en effet, pour  $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $\sqrt{M}X = 0$  implique  $MX = \sqrt{M}\sqrt{M}X = 0$  donc  $X = 0$  puisque  $M$  est inversible. Il suffit alors de vérifier que la matrice  $N = \sqrt{M}^{-1}$  est symétrique positive telle que  $N^2 = M^{-1}$ .

- Elle est symétrique positive d'après la question 1.b. comme inverse de la matrice symétrique positive inversible  $\sqrt{M}$ .
- On a  $N^2 = \sqrt{M}^{-1}\sqrt{M}^{-1} = (\sqrt{M}\sqrt{M})^{-1} = M^{-1}$ .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 39 / 1

Exercice 13 Q 1

### Exercice 13

Question 1

L'identité, plus généralement toute homothétie  $f = \lambda \text{id}_E$  de rapport  $\lambda$  tel que  $|\lambda| \leq 1$  sont des contractions :

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \leq \|x\|.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 40 / 1

Exercice 13 Q 2.a

### Exercice 13

Question 2.a

On raisonne par double implication.

- Si  $f$  est une contraction et  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ , il existe  $x \in E \setminus \{0\}$  tel que  $f(x) = \lambda x$  et alors
 
$$\|x\| \geq \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$
 d'où, puisque  $\|x\| > 0$  car  $x \neq 0$ ,  $|\lambda| \leq 1$ . La condition est donc nécessaire.
- Réciproquement, on suppose la condition satisfaite. Puisque l'endomorphisme  $f$  est symétrique, il existe une base orthonormale  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres associées, telles que  $|\lambda_i| \leq 1$  pour tout  $i \in [1, n]$  par hypothèse.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 41 / 1

Exercice 13 Q 2.a

Pour  $x \in E$  de coordonnées  $x_1, \dots, x_n$  dans la base  $\underline{e}$ , on a alors :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$$

d'où, vu l'expression de la norme en base orthonormale :

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2,$$

et par suite  $\|f(x)\| \leq \|x\|$  :  $f$  est une contraction.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 42 / 1

Exercice 13 Q 2.b

### Exercice 13

Question 2.b

On conserve les notations de la question précédente. En notant

$$\Lambda_P = \sup_{\lambda \in \text{Sp}(f)} |P(\lambda)| = \max_{1 \leq i \leq n} |P(\lambda_i)|,$$

on a de même :

$$P(f)(x) = \sum_{i=1}^n x_i P(f)(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i P(\lambda_i) e_i$$

d'où :

$$\|P(f)(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 P(\lambda_i)^2 \leq \Lambda_P^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \Lambda_P^2 \|x\|^2$$

d'où l'inégalité demandée.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 43 / 1

Exercice 13 Q 3.a

### Exercice 13

Question 3.a

On vérifie que :

- ${}^t(MM) = {}^tM({}^tM) = {}^tMM$  donc  ${}^tMM$  est symétrique ;
- pour  $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $X({}^tMM)X = (MX)(MX) = \|MX\|^2 \geq 0$ , où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne canonique sur  $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  ;
- pour  $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que  $X({}^tMM)X = 0$ , on a  $\|MX\| = 0$  d'où  $MX = 0$  et, comme  $M$  est inversible,  $X = 0$ .

La matrice  ${}^tMM$  est donc définie-positive.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 44 / 1

Exercice 13 Q 3.a

Il existe donc une matrice  $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  orthogonale et une matrice  $D \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  diagonale à coefficients diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  strictement positifs telles que  ${}^tMM = PD^tP$ .

À partir de  $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ , on construit alors une matrice  $S = P\Delta^tP$  vérifiant les propriétés suivantes :

- $S$  est symétrique :  ${}^tS = ({}^tP\Delta^tP) = ({}^tP)^t\Delta^tP = P\Delta^tP = S$  ;
- $S$  est définie-positive car elle est semblable ( $P$  est orthogonale) à  $\Delta$  donc admet pour valeurs propres  $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ , toutes strictement positives ;
- enfin,  $S^2 = P\Delta^tP P\Delta^tP = P\Delta^{2t}P = PD^2P = {}^tMM$  car  $P$  est orthogonale.

*Remarque.* On a utilisé la caractérisation des matrices définies-positives parmi les matrices symétriques établie dans la question 1.a. de l'exercice 10. Elle est également conséquence du corollaire 2.14 du cours.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 45 / 1

Exercice 13 Q 3.b

### Exercice 13

Question 3.b

Il s'agit de vérifier que la matrice  $\Omega = MS^{-1}$  est orthogonale. Or

$${}^t\Omega = ({}^tS^{-1}){}^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n,$$

d'où le résultat.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 46 / 1

Exercice 13 Q 3.c

### Exercice 13

Question 3.c

Soient  $(\Omega_1, S_1)$  et  $(\Omega_2, S_2)$  deux couples formés d'une matrice  $\Omega_i$  orthogonale et d'une matrice  $S_i$  symétrique définie-positive tels que  $M = \Omega_i S_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . On a alors  $S_1^2 = {}^tMM = S_2^2$  puisque  $\Omega_2$  est orthogonale.

Comme  $S_1$  est symétrique réelle, il existe une base orthonormale  $X_1, \dots, X_n$  de  $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $S_1$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres associées. Pour  $i \in [1, n]$  donné, on a :

$$S_1^2 X_i = S_2^2 X_i = \lambda_i^2 X_i$$

soit

$$0 = (S_2^2 - \lambda_i^2 I_n) X_i = (S_2 - \lambda_i I_n)(S_2 + \lambda_i I_n) X_i$$

où  $S_2 + \lambda_i I_n$  est inversible puisque  $-\lambda_i \leq 0$  n'est pas valeur propre de la matrice définie-positive  $S_2$ . Par suite,  $(S_2 - \lambda_i I_n) X_i = 0$  i.e.  $S_2 X_i = \lambda_i X_i$ . Ainsi  $S_1 X_i = S_2 X_i$  pour tout  $i \in [1, n]$  et, comme  $(X_1, \dots, X_n)$  est une base de  $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , il en résulte que  $S_1 = S_2$ . On a alors  $\Omega_1 = MS^{-1}$  d'où l'unicité du couple  $(\Omega, S)$ .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 47 / 1

Exercice 13 Q 3.d

### Exercice 13

Question 3.d

Soient  $\omega$  et  $s$  les endomorphismes de  $E$  représentés par les matrices  $\Omega$  et  $S$  en base  $\underline{e}$ . Pour  $x \in E$  et  $X$  la matrice colonne de ses coordonnées en base  $\underline{e}$ , on a, sachant la matrice  $\Omega$  orthogonale :

$$\|\omega(x)\|^2 = ({}^t\Omega X)(\Omega X) = {}^tX\Omega^t\Omega X = {}^tX X = \|x\|^2$$

d'après l'expression de la norme en base orthonormale. Ainsi  $\omega$  préserve la norme (on dit que c'est une isométrie), d'où :

$$\|f(x)\| = \|\omega(s(x))\| = \|s(x)\|.$$

Par suite,  $f$  est une contraction si, et seulement si,  $s$  est une contraction c'est-à-dire, d'après la question 2.a., si, et seulement si, pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $s$ , on a  $|\lambda| \leq 1$ .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 48 / 1

Exercice 14 Q 1.a

### Exercice 14

Question 1.a

Par construction, l'application  $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_n[X]$ . Elle est linéaire par linéarité de l'intégrale. C'est donc un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 49 / 1

Exercice 14 Q 1.b

### Exercice 14

Question 1.b

Pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , la relation  $\varphi(P) = 0$  équivaut à

$$\forall k \in [0, n], \int_0^1 P(t)t^k dt = 0. \quad (*)$$

Cela signifie que  $P$  est orthogonal aux monômes  $1, X, \dots, X^n$  pour le produit scalaire

$$(Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (Q_1, Q_2) = \int_0^1 Q_1(t)Q_2(t) dt.$$

Il est alors orthogonal à tout vecteur de  $\mathbb{R}_n[X]$ , donc en particulier à lui-même, ce qui implique  $P = 0$ . Ainsi  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$  et  $\varphi$  est injective.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 50 / 1

Exercice 14 Q 1.b

*Remarque.* Ce raisonnement peut être mené « à la main » : si  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  alors, en multipliant (\*) par  $a_k$  puis en sommant, on obtient

$$\int_0^1 P(t)^2 dt = \sum_{k=0}^n a_k \int_0^1 P(t)t^k dt = 0,$$

d'où l'on déduit que la fonction  $t \mapsto P(t)^2$ , continue et positive, est identiquement nulle sur  $[0, 1]$ . Le polynôme  $P$ , qui admet ainsi une infinité de racines, est donc nul.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 51 / 1

Exercice 14 Q 2.a

### Exercice 14

Question 2.a

La matrice  $M$  a pour coefficient générique

$$m_{i,j} = \int_0^1 t^i t^j dt = \frac{1}{i+j+1}, \quad 0 \leq i, j \leq n.$$

Elle est donc symétrique réelle, et par suite diagonalisable.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 52 / 1

Exercice 14 Q 2.b

### Exercice 14

Question 2.b

Il vient :

$$\begin{aligned} {}^tUMU &= \sum_{0 \leq i, j \leq n} m_{i,j} u_i u_j = \int_0^1 \left( \sum_{0 \leq i, j \leq n} u_i u_j t^{i+j} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{i=0}^n u_i t^i \right)^2 dt. \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 53 / 1

Exercice 14 Q 3

### Exercice 14

Question 3

Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  est valeur propre de  $M$  et si  $U \in \mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$  est une colonne propre associée, on a donc

$$0 \leq {}^tUMU = \lambda {}^tUU = \lambda \|U\|^2$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne canonique sur  $\mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ . Comme  $U \neq 0$ , on en déduit que  $\lambda \geq 0$ . Enfin,  $M$  étant inversible d'après 1.b., 0 n'en est pas valeur propre et l'on peut donc conclure que toutes les valeurs propres de  $M$  sont strictement positives.

*Remarque.* On peut aussi s'appuyer sur le cours en remarquant que d'après 2.b., la forme bilinéaire canoniquement associée à la matrice symétrique  $M$  est positive. Dans ces conditions, toutes les valeurs propres de  $M$  sont positives ou nulles.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 54 / 1

Exercice 14 Q 4

### Exercice 14

Question 4

Puisque  $M$  est diagonalisable, sa trace est somme de ses valeurs propres répétées avec multiplicité (i.e. autant de fois qu'elles figurent sur la diagonale d'une matrice diagonale semblable à  $M$ ). En notant  $\lambda_n$  la plus petite des valeurs propres de  $M$ , on a donc :

$$(n+1)\lambda_n \leq \text{tr } M = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$$

d'où par comparaison série-intégrale :

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda_n &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n+1} \left( 1 + \sum_{k=2}^{2n+1} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t} \right) \\ &\leq \frac{1 + \ln(2n+1)}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

On en déduit par encadrement que  $\lambda_n$  tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 55 / 1

Exercice 15 Q 1

### Exercice 15

Question 1

L'endomorphisme  $f$  étant symétrique, il existe une base orthonormale  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$  formée de vecteurs propres de  $f$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres associées, positives ou nulles puisque  $f$  est symétrique positif. Soit  $x \in E$  de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  dans la base  $\underline{e}$ . On a :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$$

d'où, d'après l'expression du produit scalaire en base orthonormale,

$$\langle x, f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

La condition  $\langle x, f(x) \rangle = 0$  est clairement nécessaire pour que  $x \in \text{Ker } f$  i.e.  $f(x) = 0$ . Réciproquement, si  $\langle x, f(x) \rangle = 0$  alors pour tout  $i \in [1, n]$ ,  $\lambda_i = 0$  ou  $x_i = 0$  et alors  $f(x) = \sum_j \lambda_j x_j e_j = 0$  c'est-à-dire  $x \in \text{Ker } f$ .

*Remarque.* Si l'on ordonne les  $\lambda_i$  pour que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$  et  $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$  soient non nuls, alors  $\text{Ker } f$  est le sous-espace de base  $(e_1, \dots, e_p)$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 56 / 1

Exercice 15 Q 2

### Exercice 15

Question 2

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  canoniquement associé à  $S$ . Comme il est représenté en base canonique, orthonormale, par la matrice  $S \in \mathbf{S}_n^+(\mathbb{R})$ , il est symétrique positif.

Pour  $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $Y = AX$ , on a

$$\langle Y, f(Y) \rangle = \langle Y, SY \rangle = {}^t YSY = {}^t X{}^t ASAX = 0$$

par hypothèse d'où, d'après la question 1.,  $Y \in \text{Ker } f = \text{Ker } S$  ce qui établit l'inclusion attendue :  $\text{Im } A \subset \text{Ker } S$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 57 / 1

Exercice 16 Q 1

### Exercice 16

Question 1

Soit  $q : X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto {}^t XAX$  la forme quadratique canoniquement associée à la matrice  $A$ .

Pour  $X \in \mathbb{R}$ , on a

$$q(X) = {}^t XAX = {}^t ({}^t XAX) = {}^t X{}^t AX = -{}^t XAX = -q(X)$$

puisque  $A$  est antisymétrique, d'où l'on déduit que  $q(X) = 0$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 58 / 1

Exercice 16 Q 2

### Exercice 16

Question 2

Si  $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est tel que  $(S + A)X = 0$ , alors

$$0 = {}^t X(S + A)X = {}^t XSX + {}^t XAX = {}^t XSX.$$

Comme la matrice  $S$  est définie-positive, cela implique  $X = 0$ .

La matrice  $S + A$  est donc inversible.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 59 / 1

Exercice 17 Q 1

### Exercice 17

Question 1

On obtient  $M_a U_i = \lambda_i U_i$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ , où

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3 + a\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = 3 - a\sqrt{2}.$$

En d'autres termes, les colonnes  $U_1, U_2$  et  $U_3$  sont propres pour  $M_a$  associées aux valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 60 / 1

Exercice 17 Q 2

### Exercice 17

Question 2

La question 1. fournit trois colonnes propres  $U_1, U_2$  et  $U_3$ . Elles sont linéairement indépendantes car indépendantes de  $a$  et, pour  $a \neq 0$ , associées à des valeurs propres deux-à-deux distinctes de  $M_a$ . Ainsi la famille  $(U_1, U_2, U_3)$  est libre maximale : c'est une base de  $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  formée de colonnes propres de  $M_a$ . La matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de la base canonique à la base  $(U_1, U_2, U_3)$  est donc inversible et vérifie, d'après la formule de changement de base appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à  $M_a$  :

$$P^{-1}M_a P = D_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 + a\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 - a\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 61 / 1

Exercice 17 Q 3

### Exercice 17

Question 3

La matrice  $M_a$  étant symétrique, la forme bilinéaire  $\varphi_a$  est symétrique. Elle constitue donc un produit scalaire si, et seulement si, elle est définie-positive c'est-à-dire, d'après le cours, si, et seulement si, les valeurs propres de  $M_a$  sont strictement positives, ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} 3 + a\sqrt{2} > 0 \\ 3 - a\sqrt{2} > 0 \end{cases} \iff -\frac{3}{\sqrt{2}} < a < \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

On suppose ces conditions satisfaites dans la suite. On parle de  $\varphi_a$ -orthogonalité pour le produit scalaire  $\varphi_a$  et d'orthogonalité pour le produit scalaire canonique.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 62 / 1

Exercice 17 Q 3

Les vecteurs  $U_1, U_2$  et  $U_3$  étant orthogonaux (car propres pour  $M_a$  symétrique, associés à des valeurs propres deux-à-deux distinctes, du moins pour  $a \neq 0$ ), on obtient par normalisation une base orthonormale  $(V_1, V_2, V_3)$  de  $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , dans laquelle le produit scalaire  $\varphi_a$  est représenté, d'après la formule de changement de base pour les formes bilinéaires, par la matrice

$${}^t Q M_a Q = Q^{-1} M_a Q = D_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 + a\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 - a\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

où  $Q$  est la matrice de passage de la base canonique à la base  $(V_1, V_2, V_3)$ , orthogonale puisque ces deux bases sont orthonormales.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 63 / 1

Exercice 17 Q 3

La base  $(V_1, V_2, V_3)$  est  $\varphi_a$ -orthogonale puisque la matrice  $D_a$  est diagonale. En normalisant ses vecteurs, on obtient donc une base  $\varphi_a$ -orthonormale :

$$W_1 = V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \frac{1}{\sqrt{3 + a\sqrt{2}}} V_2 = \frac{1}{2\sqrt{3 + a\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

et  $W_3 = \frac{1}{\sqrt{3 - a\sqrt{2}}} V_3 = \frac{1}{2\sqrt{3 - a\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 64 / 1



## Exercice 18

## Question 2

La matrice symétrique associée à  $q_2$  est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Symétrique réelle, cette matrice est diagonalisable avec des sous-espaces propres supplémentaires orthogonaux. On en détermine les valeurs propres : pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A - \lambda I_3) &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 2(1-\lambda)L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2\lambda^2 - 4\lambda + \frac{3}{2} \\ 0 & 1 - \lambda & 2 - 2\lambda \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A - \lambda I_3) &\stackrel{\substack{L_2 \leftrightarrow L_2 + (\lambda-1)L_1 \\ L_1 \leftrightarrow L_2}}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2\lambda^2 - 4\lambda + \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & P(\lambda) \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & P(\lambda) \\ 0 & 1 & -2\lambda^2 - 4\lambda + \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où

$$P(\lambda) = 2\lambda^3 - 6\lambda^2 + \frac{7}{2}\lambda + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\lambda - 1)(4\lambda^2 - 8\lambda - 1).$$

Les valeurs propres de  $A$  sont les réels  $\lambda$  tels que  $\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) < 3$  c'est-à-dire  $P(\lambda) = 0$ . La matrice  $A$  admet donc pour valeurs propres  $1$ ,  $1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$  et  $1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$ . Comme la troisième est négative, la forme bilinéaire canoniquement associée à  $A$  n'est pas définie-positive et  $q$  n'est donc pas une norme euclidienne.