Fonctions de plusieurs variables : calcul différentiel

Feuille d'exercices

1 On considère la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto y\sin x + \cos y$.

✎

1. Calculer les dérivées partielles de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer la dérivée directionnelle $\partial_V f(M)$ de f en $M = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ selon le vecteur $V = (h,k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
3. Vérifier que $\partial_V f(M) = \langle \nabla f(M), V\rangle$.

2 Déterminer les vecteurs $V \in \mathbb{R}^2$ unitaires tels que la fonction $(x,y) \longmapsto \sqrt[3]{xy}$ admet une dérivée dans la direction V à l'origine.

✎

3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0,1) = 0$, $\partial_1 f(0,1) = 1$ et $\partial_2 f(0,1) = 2$.

✎

1. Écrire le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de $(0,1)$.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 des fonctions

$$t \longmapsto f(-2t, \mathbf{e}^t) \quad \text{et} \quad t \longmapsto f\left(t, \frac{\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{-t}}{2}\right)$$

ainsi que la limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(-2t, \mathbf{e}^t)}{f\left(t, \frac{\mathbf{e}^t+\mathbf{e}^{-t}}{2}\right)}.$$

4 Étudier la continuité, l'existence de dérivées partielles, leur continuité ainsi que la classe $\mathscr{C}^1$ de la fonction

✎

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{cases} y^2 \sin \dfrac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

5 Montrer que la fonction $X \longmapsto \frac{1}{\|X\|^2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En déterminer le développement limité à l'ordre 1 au voisinage d'un point A.

✎

6 Déterminer le plan tangent à l'origine des fonctions suivantes, éventuellement prolongées par continuité :

✎

1. $(x,y) \longmapsto 1 + x - \sqrt{1+x-y}$;
2. $(x,y) \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2+x+\ln(1+y)}}$;
3. $(x,y) \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+\cos(x+y)}}$;
4. $(x,y) \longmapsto \dfrac{\sin(x+y) - \sin x - \sin y}{xy}$.

7 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u,v) \longmapsto f(u,v)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Exprimer les dérivées partielles de la fonction $g : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto f(xz, yz)$ en fonction de celles de f.

✎

8 Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ convexe de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que si $\nabla f(X) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{U}$, alors f est constante.
2. Montrer que si $X \longmapsto \nabla f(X)$ est constante sur $\mathcal{U}$, alors f est une fonction affine i.e. il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f - b$ soit la restriction d'une forme linéaire. Que vaut b lorsque $0 \in \mathcal{U}$?
Indication. On pourra appliquer une formule de Taylor en un point $A \in \mathcal{U}$.

9 Déterminer les fonctions $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ à déterminer, vérifiant pour tout $(x,y) \in \mathcal{U}$:

1. $\begin{cases} \partial_1 f(x,y) = 2x + \dfrac{1}{y} \\ \partial_2 f(x,y) = 2y - \dfrac{x}{y^2} \end{cases}$;
2. $\begin{cases} \partial_1 f(x,y) = \dfrac{2+x}{y} \\ \partial_2 f(x,y) = \dfrac{2+y}{x} \end{cases}$.

10 ♣

1. Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et α une constante réelle.
On dit que f est positivement homogène de degré α si :

$$\forall t > 0, \qquad \forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad f(tx_1,\ldots,tx_n) = t^\alpha f(x_1,\ldots,x_n).$$

a. Montrer que si f est positivement homogène de degré α, alors ses dérivées partielles sont positivement homogènes de degré $\alpha - 1$.

b. Montrer que si f est positivement homogène de degré α, on a :

$$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\ldots,x_n) = \alpha f(x_1,\ldots,x_n).$$

c. On suppose réciproquement que f vérifie la relation de la question précédente. Montrer que pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, l'application $\varphi : t \longmapsto f(tx_1,\ldots,tx_n)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall t > 0, \quad \varphi'(t) = \frac{\alpha}{t}\varphi(t).$$

En déduire que f est positivement homogène de degré α.
Indication. On pourra dériver la fonction $t \longmapsto t^{-\alpha}\varphi(t)$.

2. On veut déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}. \qquad (\star)$$

a. Déterminer une solution positivement homogène f_0 de $(\star)$.

b. Montrer que f est solution de $(\star)$ si, et seulement si, $g = f - f_0$ vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0.$$

En déduire que g soit être constante.

c. Conclure.

11 ★ Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ convexe de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe un réel M tel que $\|\nabla f(A)\| \leqslant M$ pour tout $A \in \mathcal{U}$.

✎ : application ♣ : difficile ★ : classique

Montrer que :

$$\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{U}, \quad |f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A})| \leqslant \mathrm{M} \, \|\mathrm{B} - \mathrm{A}\| .$$

12 ✎ Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On définit la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto y - \varphi(x)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Décrire les lignes de niveau de f.
3. Soient $\mathrm{A} = (x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda = f(\mathrm{A})$.
   a. Déterminer un vecteur tangent en A à la ligne $\mathcal{L}_\lambda$ de niveau λ de f.
   b. Vérifier que ce vecteur est orthogonal au gradient $\nabla f(\mathrm{A})$.

13 ★ Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$.
On dit que f présente en $\mathrm{A} \in \mathcal{U}$:

➢ un *maximum global* si :

$$\forall \mathrm{X} \in \mathcal{U}, \quad f(\mathrm{X}) \leqslant f(\mathrm{A}).$$

➢ un *maximum local* s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall \mathrm{X} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{B}(\mathrm{A}, r), \quad f(\mathrm{X}) \leqslant f(\mathrm{A}).$$

On définit de même les notions de minimum global et local.

1. Montrer que si f admet en $\mathrm{A} \in \mathcal{U}$ un extremum local, alors A est un *point critique* de f, i.e. $\nabla f(\mathrm{A}) = 0$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

14 ✎ *Cet exercice utilise les notions introduites et le résultat démontré dans l'exercice 13.*
On considère la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto 3x^4 - 4x^2 y + y^2$.

1. Déterminer l'unique point critique de f.
2. **a.** Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la droite Δ_a d'équation $y = ax$. Montrer que, lorsque (x, y) parcourt la droite Δ_a, $f(x, y)$ atteint un minimum en $(0, 0)$.
   b. Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = 2x^2$. Montrer que, lorsque (x, y) parcourt la parabole $\mathcal{P}$, $f(x, y)$ atteint un maximum en $(0, 0)$.
   c. Que peut-on déduire des questions précédentes ?
3. **a.** Vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$.
   b. En quoi la factorisation précédente éclaire-t-elle les cas étudiés en **2.a.** et **2.b.** ?

15 *Cet exercice utilise les notions introduites et le résultat démontré dans l'exercice 13.*
On considère la fonction

$$f : (x_1, \ldots, x_n) \in \left]0, +\infty\right[^n \longmapsto \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right).$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que f atteint son minimum global (à préciser) en chacun de ses points critiques.

16 ♣ On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ de la forme $\mathrm{I} = \left]-a, a\right[$, où $a > 0$ est un réel donné. On considère une fonction $f : \mathrm{I}^2 \longrightarrow \mathrm{I}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe un réel $\kappa \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2, \quad |\partial_1 f(x, y)| + |\partial_2 f(x, y)| \leqslant \kappa.$$

1. Soient (x, y) et (x', y') deux couples de I^2. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que :

$$|f(x, y) - f(x', y')| \leqslant \kappa \max(|x - x'|, |y - y'|).$$

2. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathrm{I}^2$ donné, on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$ ainsi que la relation de récurrence $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose également :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \max(|u_{n+2} - u_{n+1}|, |u_{n+1} - u_n|).$$

   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} \leqslant \kappa a_n$.
   b. Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente.
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Montrer que la limite de la suite (u_n) est indépendante du choix du couple (α, β).

17 On considère la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

1. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer $\partial^2_{1,2} f(0, 0)$ et $\partial^2_{2,1} f(0, 0)$. Que peut-on en déduire ?

18 ✎ Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, on pose :

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f.$$

Montrer que si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, on a :

$$\Delta(fg) = f(\Delta g) + 2 \langle \nabla f, \nabla g \rangle + (\Delta f) g.$$

19 ✎ Calculer le développement limité au second ordre des fonctions suivantes au voisinage du point A indiqué :

1. $(x, y) \longmapsto xy + \mathbf{e}^y$, $\quad \mathrm{A} = (0, 0)$;
2. $(x, y) \longmapsto \mathbf{e}^{x^2 - 1} \cos y$, $\quad \mathrm{A} = (1, 0)$;
3. $(x, y, z) \mapsto xyz + xy + yz + zx$, $(1, 0, 1)$;
4. $(x, y, z) \longmapsto \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$, $\quad \mathrm{A} = (1, 1, 1)$.

20 ★♣ **1.** Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ la fonction F par :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad \mathrm{F}(x, y) = f\left(x + \frac{1}{y}\right) + g\left(x - \frac{1}{y}\right).$$

a. Justifier que $\mathcal{U}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
b. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ et vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}(x, y) - y^4 \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2}(x, y) - 2y^3 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(x, y) = 0. \qquad (\star)$$

2. Réciproquement, soit F une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ vérifiant la relation $(\star)$. On définit sur $\mathcal{V} = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s > t\}$ la fonction G par :

$$\forall (s, t) \in \mathcal{V}, \quad \mathrm{G}(s, t) = \mathrm{F}\left(\frac{s+t}{2}, \frac{2}{s-t}\right).$$

a. Justifier que $\mathcal{V}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
b. Montrer que la fonction G est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{V}$ et vérifie :

$$\forall (s, t) \in \mathcal{V}, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial s \partial t}(s, t) = 0.$$

c. En déduire l'existence de deux fonctions f et g de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad \mathrm{F}(x, y) = f\left(x + \frac{1}{y}\right) + g\left(x - \frac{1}{y}\right).$$

21 ★ Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$. Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{U}$ et $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(\mathrm{A}, r) \subset \mathcal{U}$.

1. Soit $\mathrm{H} \in \mathcal{B}(0, r)$.
a. Justifier que la fonction partielle $u : t \in [0, 1] \longmapsto f(\mathrm{A} + t\mathrm{H})$ est bien définie.
b. Justifier que u est de classe $\mathscr{C}^2$ et exprimer $u'(t)$ et $u''(t)$ pour $t \in [0, 1]$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de f.
c. En déduire que :

$$f(\mathrm{A} + \mathrm{H}) = f(\mathrm{A}) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(\mathrm{A}) h_j + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} h_i h_j \int_0^1 (1-t) \partial^2_{i,j} f(\mathrm{A} + t\mathrm{H}) \, \mathrm{d}t.$$

2. On souhaite établir le développement limité de f à l'ordre 2 en A :

$$f(\mathrm{A} + \mathrm{H}) = f(\mathrm{A}) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(\mathrm{A}) h_j + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \partial^2_{i,j} f(\mathrm{A}) h_i h_j + o(\|\mathrm{H}\|^2), \quad \mathrm{H} \to 0.$$

a. En utilisant **1.c.**, montrer que :

$$f(\mathrm{A} + \mathrm{H}) - f(\mathrm{A}) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(\mathrm{A}) h_j - \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \partial^2_{i,j} f(\mathrm{A}) h_i h_j =$$
$$= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} h_i h_j \int_0^1 (1-t) \big(\partial^2_{i,j} f(\mathrm{A} + t\mathrm{H}) - \partial^2_{i,j} f(\mathrm{A})\big) \, \mathrm{d}t.$$

b. Étant donné $\varepsilon > 0$, justifier l'existence d'un réel $\varrho \in]0, r[$ tel que :

$$\forall \mathrm{X} \in \mathcal{B}(\mathrm{A}, \varrho), \quad \forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \left|\partial^2_{i,j} f(\mathrm{X}) - \partial^2_{i,j} f(\mathrm{A})\right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{n^2}.$$

c. Conclure.

22 Soient $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ et A un point de $\mathcal{U}$. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathrm{U} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{S} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique tels que :

$$f(\mathrm{A} + \mathrm{H}) = \alpha + \langle \mathrm{U}, \mathrm{H} \rangle + \frac{1}{2}\,{}^t\mathrm{HSH} + o(\|\mathrm{H}\|^2), \quad \mathrm{H} \to 0.$$

Justifier que $\alpha = f(\mathrm{A})$, $\mathrm{U} = \nabla f(\mathrm{A})$ et $\mathrm{S} = \nabla^2 f(\mathrm{A})$.