Travaux dirigés

Fonctions de plusieurs variables : calcul différentiel

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2017/2018

Exercice 3

Question 1

La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^1$, elle admet au voisinage de A le développement limité

$$\begin{aligned} f(h, 1+k) &= f(0,1) + \partial_1 f(0,1)h + \partial_2 f(0,1)k + o\big(\|(h,k)\|\big) \\ &= h + 2k + o\big(\|(h,k)\|\big) \end{aligned}$$

lorsque $(h,k) \to (0,0)$.

Exercice 3

Question 2

On a d'abord

$$\left.\begin{aligned} f(-2t, \mathbf{e}^t) &= f\big(-2t, 1+t+o(t)\big) \\ &= -2t + 2t + o\big(\sqrt{5t^2 + o(t)^2}\big) = o(t) \end{aligned}\right., \quad t \to 0$$

ainsi que

$$f\left(t, \frac{\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{-t}}{2}\right) = f\big(t, 1+o(t)\big) = t + o(t), \quad t \to 0.$$

Par suite,

$$\frac{f(-2t, \mathbf{e}^t)}{f\big(t, \frac{\mathbf{e}^t+\mathbf{e}^{-t}}{2}\big)} = \frac{o(t)}{t+o(t)} = \frac{o(1)}{1+o(1)} \xrightarrow[t \to 0]{} 0.$$

Exercice 4

Tout d'abord, la fonction f est continue en tout point de l'ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ d'après les théorèmes opératoires. En effet, pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (x_0, y_0) inclus dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, sur lequel on dispose donc d'une unique expression pour f :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{V}, \quad f(x,y) = y^2 \sin\frac{x}{y}.$$

Étant donné un point $(x_0, 0)$ du complémentaire, on observe que (même si $y = 0$!)

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x,y)| \leqslant y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,0)]{} 0,$$

d'où l'on déduit par encadrement que

$$f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,0)]{} 0 = f(x_0, 0),$$

ce qui signifie que f est continue en $(x_0, 0)$.

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

Pour commencer, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ (donc admet des dérivées partielles continues) sur l'ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ avec :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \quad \partial_1 f(x,y) = y\cos\frac{x}{y}, \quad \partial_2 f(x,y) = 2y\sin\frac{x}{y} - x\cos\frac{x}{y}.$$

On considère à présent un point de la forme $(x_0, 0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Existence de $\partial_1 f(x_0, 0)$

La fonction partielle $x \longmapsto f(x, 0) = 0$ est dérivable en x_0 ce qui justifie l'existence de $\partial_1 f(x_0, 0) = 0$.

La fonction f admet donc une dérivée partielle $\partial_1 f$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$\partial_1 f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{cases} y\cos\frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

Continuité de $\partial_1 f$ en $(x_0, 0)$

On a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\partial_1 f(x,y)| \leqslant |y| \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,0)]{} 0.$$

Par suite,

$$\partial_1 f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,0)]{} 0 = \partial_1 f(x_0, 0).$$

La dérivée partielle $\partial_1 f$ est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

Existence de $\partial_2 f(x_0, 0)$

La fonction partielle

$$y \longmapsto f(x_0, y) = \begin{cases} y^2 \sin\frac{x_0}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

est dérivable en 0 : en effet,

$$\frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y} = y\sin\frac{x_0}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

d'où l'existence de $\partial_2 f(x_0, 0) = 0$.

La fonction f admet donc une dérivée partielle $\partial_2 f$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$\partial_2 f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{cases} 2y\sin\frac{x}{y} - x\cos\frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

Continuité de $\partial_2 f$ en $(x_0, 0)$

Si $x_0 \neq 0$, $2y\sin\frac{x}{y}$ converge vers 0 alors que $x\cos\frac{x}{y}$ diverge lorsque $(x,y) \to (x_0, 0)$. La dérivée partielle $\partial_2 f$ n'est donc pas continue en $(x_0, 0)$.

Si $x_0 = 0$, alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\partial_2 f(x,y)| \leqslant 2|y| + |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0,$$

d'où l'on déduit que

$$\partial_2 f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = \partial_2 f(0,0)$$

et $\partial_2 f$ est donc continue en $(0,0)$.

Classe $\mathscr{C}^1$

La fonction f n'est donc pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5

On a :

$$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad f(X) = \frac{1}{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

La fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
Ses dérivées partielles sont données par :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \partial_j f(X) = -\frac{2x_j}{\|X\|^4}.$$

Le gradient de f vaut donc $\nabla f(X) = -\frac{2}{\|X\|^4} X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et le développement limité de f en $A \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} f(X) &= f(A) + \langle \nabla f(A), X - A \rangle + o(\|X - A\|) \\ &= \frac{1}{\|A\|^2} - \frac{2}{\|A\|^4} \langle A, X - A \rangle + o(\|X - A\|)', \end{aligned} \quad X \to A.$$

Remarque. On a vu en exemple dans le cours que la fonction

$$g : X \in \mathbb{R}^n \longmapsto \|X\|^2$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ avec $\nabla g(X) = 2X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

On a $f = 1/g$ et d'après les résultats obtenus, la formule

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \nabla f(X) = -\frac{1}{g(X)^2} \nabla g(X)$$

est satisfaite, en accord avec les théorèmes opératoires du cours.

Exercice 6

Question 2

La fonction

$$f : (x, y) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2 + x + \ln(1 + y)}}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $]-1, 1[\times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ par opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^1$ avec, pour tout $(x, y) \in]-1, 1[\times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$:

$$\partial_1 f(x, y) = -\frac{1}{2\big(2 + x + \ln(1 + y)\big)^{3/2}}$$

et

$$\partial_2 f(x, y) = -\frac{1}{2\big(2 + x + \ln(1 + y)\big)^{3/2}(1 + y)}.$$

Elle admet donc un développement limité du premier ordre à l'origine :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + \partial_1 f(0, 0)x + \partial_2 f(0, 0)y + o\big(\|(x, y)\|\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}x - \frac{1}{4\sqrt{2}}y + o\big(\|(x, y)\|\big) \end{aligned}, \quad (x, y) \to (0, 0).$$

Le graphe de f admet donc au point $\big(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ le plan tangent d'équation

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}x - \frac{1}{4\sqrt{2}}y.$$

Exercice 7

Par application de la formule de dérivation d'une composée, on obtient pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial(xz)}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}(xz, yz) + \frac{\partial(yz)}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}(xz, yz) = z\frac{\partial f}{\partial u}(xz, yz),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = z\frac{\partial f}{\partial v}(xz, yz)$$

et enfin

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = x\frac{\partial f}{\partial u}(xz, yz) + y\frac{\partial f}{\partial v}(xz, yz).$$

Exercice 8

Question 1

Pour $A \neq B \in \mathcal{U}$ et $V = \overrightarrow{AB} = B - A$ donnés, la fonction partielle $u : t \longmapsto f(A + tV)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ (car le segment $[A, B]$ est inclus dans le convexe $\mathcal{U}$) avec :

$$\forall t \in [0, 1], \quad u'(t) = \langle \nabla f(A + tV), V \rangle.$$

Par application du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral à u sur $[0, 1]$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} f(B) = u(1) &= u(0) + \int_0^1 u'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(A) + \int_0^1 \big\langle \nabla f\big(A + t(B - A)\big), B - A \big\rangle\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Par suite, si $\nabla f(X) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{U}$, alors $f(B) = f(A)$ pour tout $B \in \mathcal{U}$ si bien que f est constante sur $\mathcal{U}$.

Exercice 8

Question 2

De même, si $\nabla f(X) = W_0$ pour tout $X \in \mathcal{U}$, alors pour $A \in \mathcal{U}$ donné il vient d'après la formule précédente :

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathcal{U}, \quad f(X) &= f(A) + \int_0^1 \langle W_0, X - A \rangle\,\mathrm{d}t \\ &= f(A) + \langle W_0, X - A \rangle = b + \langle W_0, X \rangle \end{aligned}$$

où $b = f(A) - \langle W_0, A \rangle$ et f est donc affine.

Si $0 \in \mathcal{U}$, on peut prendre $A = 0$ et l'on a alors $b = f(0)$.

Exercice 9

Question 1

Les relations ont un sens sur l'ouvert $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On procède par analyse-synthèse pour déterminer les fonctions $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ satisfaisant les relations

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad \partial_1 f(x, y) = 2x + \frac{1}{y}, \quad \partial_2 f(x, y) = 2y - \frac{x}{y^2}. \qquad (1)$$

Analyse

Soit f solution du problème.

- Pour $y \in \mathbb{R}^*$ donné, la fonction partielle $x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x,y)$ ayant pour dérivée
$$x \in \mathbb{R} \longmapsto 2x + \frac{1}{y}$$
que l'on primitive aisément, il existe une constante (par rapport à x, mais dépendant de y) $K(y)$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + \frac{x}{y} + K(y). \tag{2}$$
- La fonction K est nécessairement de classe $\mathscr{C}^1$ par opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^1$: en effet, en évaluant la formule précédente en $x = 0$, on obtient
$$\forall y \in \mathbb{R}^*, \quad K(y) = f(0,y).$$

- Par suite, en dérivant (2) par rapport à y, il vient :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \quad \partial_2 f(x,y) = -\frac{x}{y^2} + K'(y).$$
Par comparaison à (1), on en déduit que :
$$\forall y \in \mathbb{R}^*, \quad K'(y) = 2y$$
d'où l'existence de deux constantes K_1 et K_2 telles que :
$$\forall y \in \mathbb{R}^*, \quad K(y) = \begin{cases} y^2 + K_1 & \text{si } y < 0 \\ y^2 + K_2 & \text{si } y > 0 \end{cases}.$$

Ainsi les fonctions solutions sont nécessairement de la forme
$$f : (x,y) \in \mathcal{U} \longmapsto \begin{cases} x^2 + \frac{x}{y} + y^2 + K_1 & \text{si } y < 0 \\ x^2 + \frac{x}{y} + y^2 + K_2 & \text{si } y > 0 \end{cases},$$
où K_1 et K_2 sont deux constantes réelles.

Remarque. Il aurait été plus délicat de commencer par primitiver par rapport à y. Pourquoi ?

Synthèse

Réciproquement, on vérifie immédiatement que les fonctions précédentes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur chacun des *ouverts* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$ (où les théorèmes opératoires s'appliquent car la fonction n'est définie que par une seule formule) recouvrant $\mathcal{U}$ donc sur $\mathcal{U}$, avec les dérivées partielles prescrites.

Conclusion

Les solutions sont les fonctions de la forme
$$f : (x,y) \in \mathcal{U} \longmapsto \begin{cases} x^2 + \frac{x}{y} + y^2 + K_1 & \text{si } y < 0 \\ x^2 + \frac{x}{y} + y^2 + K_2 & \text{si } y > 0 \end{cases},$$
où K_1 et K_2 sont deux constantes réelles.

Exercice 10
Question 1.a

Soient f homogène de degré α et $i \in [\![1,n]\!]$. Pour $t > 0$ donné, on a par hypothèse :
$$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(tx_1,\ldots,tx_n) = t^\alpha f(x_1,\ldots,x_n).$$
En dérivant par rapport à x_j on en déduit (par application des règles de dérivation d'une composée), pour tout $(x_1,\ldots,x_n)$:
$$t\frac{\partial f}{\partial x_j}(tx_1,\ldots,tx_n) = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\ldots,x_n)$$
c'est-à-dire
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(tx_1,\ldots,tx_n) = t^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\ldots,x_n)$$
et la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est donc homogène de degré $\alpha - 1$.

Exercice 10
Question 1.b

Soit f homogène de degré α. Pour $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ donné, on a donc :
$$\forall t > 0, \quad f(tx_1,\ldots,tx_n) = t^\alpha f(x_1,\ldots,x_n).$$
En dérivant par rapport à t, on obtient :
$$\forall t > 0, \quad \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx_1,\ldots,tx_n) = \alpha t^{\alpha-1} f(x_1,\ldots,x_n)$$
d'où, pour $t = 1$:
$$\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\ldots,x_n) = \alpha f(x_1,\ldots,x_n).$$

Exercice 10
Question 1.c

Soit $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. D'après un calcul de la question **b.**, la fonction $\varphi : t \longmapsto f(tx_1,\ldots,tx_n)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :
$$\forall t > 0, \quad \varphi'(t) = \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx_1,\ldots,tx_n).$$
Si f satisfait la relation d'Euler (la relation de la question **b.**), on a donc :
$$\forall t > 0, \quad \varphi'(t) = \frac{1}{t}\Big(\sum_{j=1}^n tx_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx_1,\ldots,tx_n)\Big) = \frac{\alpha}{t} f(tx_1,\ldots,tx_n) = \frac{\alpha}{t}\varphi(t).$$

La fonction $t \longmapsto t^{-\alpha}\varphi(t)$ est dérivable, de dérivée
$$t \longmapsto -\alpha t^{-\alpha-1}\varphi(t) + t^{-\alpha}\varphi'(t) = 0.$$
Elle est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$; en d'autres termes, il existe une constante réelle λ telle que
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(t) = \lambda t^\alpha.$$
En évaluant la formule en $t = 1$, on obtient $\lambda = \varphi(1) = f(x_1,\ldots,x_n)$ d'où :
$$f(tx_1,\ldots,tx_n) = \varphi(t) = \lambda t^\alpha = t^\alpha f(x_1,\ldots,x_n)$$
et f est homogène de degré α.

Exercice 10
Question 2.a

Analyse

Si f_0 homogène de degré α est solution de $(\star)$, alors
$$(x,y) \longmapsto x\frac{\partial f_0}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f_0}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$$
est homogène de degré $\alpha - 1 + 1$ d'après la question **1.a.**. Or
$$\forall t > 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \sqrt{(tx)^4 + (ty)^4} = t^2\sqrt{x^4+y^4}$$
donc nécessairement $\alpha = 2$.
D'après la question **b.**, on a alors nécessairement
$$f_0 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \frac{1}{2}\sqrt{x^4+y^4}.$$

Synthèse

On vérifie que la fonction

$$f_0 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \frac{1}{2}\sqrt{x^4 + y^4}$$

est bien solution du problème.

Tout d'abord elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \frac{\partial f_0}{\partial x}(x, y) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + y^4}}, \quad \frac{\partial f_0}{\partial y}(x, y) = \frac{y^3}{\sqrt{x^4 + y^4}}.$$

Par ailleurs, la fonction partielle $x \longmapsto f(x, 0) = x^2$ est dérivable à l'origine, d'où l'existence de $\frac{\partial f_0}{\partial x}(0,0) = 0$ et, de même, celle de $\frac{\partial f_0}{\partial y}(0,0) = 0$.

Enfin, pour $x \neq 0$,

$$\left|\frac{\partial f_0}{\partial x}(x, y)\right| \leqslant \frac{|x|^3}{\sqrt{x^4}} = |x| \,.$$

L'inégalité étant évidente pour $x = 0$, on a donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \left|\frac{\partial f_0}{\partial x}(x, y)\right| \leqslant |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0,$$

d'où l'on déduit par encadrement que

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = \frac{\partial f_0}{\partial x}(0,0)$$

et $\frac{\partial f_0}{\partial x}$ est continue à l'origine. On montrerait de même que $\frac{\partial f_0}{\partial y}$ est également continue à l'origine.

La fonction f_0 est donc continue sur $\mathbb{R}^2$ et l'on vérifie alors que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (nul ou non),

$$x\frac{\partial f_0}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f_0}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}.$$

Exercice 10

Question 2.b

L'application L qui, à une fonction $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, associe la fonction

$$L(h) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial h}{\partial y}(x, y)$$

est linéaire par linéarité de la dérivation. Dès lors, f_0 étant solution de $(\star)$, une fonction f est solution de $(\star)$ si, et seulement si,

$$L(f) = L(f_0) \quad \Longleftrightarrow \quad L(f - f_0) = 0$$

c'est-à-dire, en notant $g = f - f_0$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Cette condition signifie, d'après les questions **1.b.** et **1.c.**, que g est homogène de degré 0 c'est-à-dire constante. En effet, si g est homogène de degré 0 alors, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donné, on a

$$\forall t > 0, \quad g(tx, ty) = t^0 g(x, y) = g(x, y)$$

d'où, en passant à la limite lorsque $t \to 0$, $g(0,0) = g(x, y)$. La réciproque est évidente.

Exercice 10

Question 2.c

D'après les questions **a.** et **b.**, les fonctions satisfaisant la condition $(\star)$ sont les fonctions

$$f = f_0 + k : (x, y) \longmapsto \frac{1}{2}\sqrt{x^4 + y^4} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 11

Pour $A \neq B \in \mathcal{U}$ et $V = \overrightarrow{AB} = B - A$ donnés, la fonction partielle $u : t \longmapsto f(A + tV)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ (car le segment $[A, B]$ est inclus dans le convexe $\mathcal{U}$) avec :

$$\forall t \in [0, 1], \quad u'(t) = \langle \nabla f(A + tV), V \rangle \,.$$

Par application du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral à u sur $[0, 1]$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} f(B) = u(1) &= u(0) + \int_0^1 u'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(A) + \int_0^1 \big\langle \nabla f\big(A + t(B - A)\big), B - A\big\rangle \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} |f(B) - f(A)| &\leqslant \int_0^1 \big|\big\langle \nabla f\big(A + t(B - A)\big), B - A\big\rangle\big| \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^1 \big\|\nabla f\big(A + t(B - A)\big)\big\| \,\|B - A\| \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^1 M \,\|B - A\| \,\mathrm{d}t = M\,\|B - A\| \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 12

Question 1

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ par opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^1$.

Exercice 12
Question 2

La ligne $\mathcal{L}_0$ de niveau 0 de f est le graphe de la fonction φ. La ligne niveau λ de f est le graphe de la fonction $\varphi + \lambda$, elle se déduit de $\mathcal{L}_0$ par translation de vecteur $\lambda\vec{\jmath}$.

Exercice 12
Question 3.a

La tangente en A à $\mathcal{L}_\lambda$ a pour équation $y = y_0 + \varphi'(x_0)(x - x_0)$. Elle est donc dirigée par le vecteur $\big(1, \varphi'(x_0)\big)$.

Exercice 12
Question 3.b

Le gradient de f en A est donné par
$$\nabla f(A) = \big(\partial_1 f(A), \partial_2 f(A)\big) = \big(-\varphi'(x_0), 1\big),$$
qui est orthogonal à $\big(1, \varphi'(x_0)\big)$. Le gradient est donc orthogonal aux lignes de niveau.

Exercice 13
Question 1

On suppose que f admet en A un extremum local, par exemple un maximum (sinon, $-f$ en admet un). Puisque $\mathcal{U}$ est ouvert, il existe donc $r > 0$ tel que :
$$\forall X \in \mathcal{B}(A, r), \quad f(X) \leqslant f(A).$$
Étant donné un vecteur $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la fonction partielle $u : t \longmapsto f(A + tV)$ admet alors un maximum local en 0 : pour $|t| < \frac{r}{\|V\|}$, on a $\|tV\| < r$ d'où $A + tV \in \mathcal{B}(A, r)$ et $u(t) = f(A + tV) \leqslant f(A) = u(0)$.
Le résultat étant acquis pour les fonctions d'une variable, cela entraîne $\partial_V f(A) = u'(0) = 0$. Ainsi toutes les dérivées directionnelles donc en particulier partielles de f s'annulent en A, ce qui signifie que $\nabla f(A) = 0$.

Pour établir le résultat concernant la fonction partielle u, on écrit que :
$$\forall t \in \Big[-\frac{r}{\|V\|}, 0\Big[, \quad \frac{u(t) - u(0)}{t} \geqslant 0$$
puisque u admet un maximum en 0 d'où, en passant à la limite lorsque $t \to 0$, $t < 0$, $u'(0) \geqslant 0$.
En écrivant pour les mêmes raisons
$$\forall t \in \Big]0, \frac{r}{\|V\|}\Big], \quad \frac{u(t) - u(0)}{t} \leqslant 0$$
puis en passant à la limite lorsque $t \to 0$, $t > 0$, on obtient $u'(0) \leqslant 0$, d'où finalement $u'(0) = 0$.

Exercice 13
Question 2

La réciproque est déjà fausse pour les fonctions d'une variable : la fonction $x \longmapsto x^3$ n'admet pas d'extremum local en 0 alors que sa dérivée s'y annule.

Exercice 14
Question 1

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ avec :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1 f(x, y) = 4x(3x^2 - 2y), \quad \partial_2 f(x, y) = 2(-2x^2 + y).$$
Le point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est donc point critique de f si, et seulement si,
$$\begin{aligned} \begin{cases} x(3x^2 - 2y) = 0 \\ -2x^2 + y = 0 \end{cases} &\iff x = y = 0 \text{ ou } \begin{cases} 3x^2 - 2y = 0 \\ -2x^2 + y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = 0. \end{aligned}$$
La fonction f admet donc $(0, 0)$ comme seul point critique.

Exercice 14
Question 2.a

Les points de la droite Δ_a sont les points de la forme $(x, y) = (t, at)$, $t \in \mathbb{R}$, pour lesquels
$$f(x, y) = f(t, at) = t^2(3t^2 - 4at + a^2) = \varphi(t).$$
L'étude de la fonction φ montre qu'elle admet un minimum local en $t = 0$, égal à 0. Cela peut aussi être établi grâce à un équivalent : pour $a \neq 0$,
$$\varphi(t) \sim a^2 t^2 \geqslant 0, \quad t \to 0,$$
si bien que $\varphi(t) \geqslant 0 = \varphi(0)$ au voisinage de 0. Pour $a = 0$, le résultat est immédiat.

Exercice 14

Question 2.b

Les points de la parabole $\mathcal{P}$ sont les points de la forme $(x, y) = (t, 2t^2)$, pour lesquels $f(x, y) = -t^4 \leqslant 0 = f(0, 0)$. La fonction f présente donc un maximum en $(0, 0)$ le long de la parabole $\mathcal{P}$.

Exercice 14

Question 2.c

D'après l'exercice 13 et la question **1.**, les seuls extremums locaux éventuels de f sont les points critiques de f, il n'y en a donc qu'un ici : $(0, 0)$, qui réciproquement n'est pas un extremum local d'après **a.** et **b.**. La fonction f ne présente donc aucun extremum local ni global.

Exercice 14

Question 3.a

On développe...

Exercice 14

Question 3.b

D'après **a.**, la fonction f est négative entre les paraboles d'équations $y = x^2$ et $y = 3x^2$ et positive en dehors (faire un dessin !). Elle ne garde donc pas un signe constant au voisinage de $(0, 0)$, qui ne peut donc être extremum de f puisque $f(0, 0) = 0$.

Exercice 15

Question 1

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $]0, +\infty[^n$ par opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Ses dérivées partielles sont données par :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \forall X = (x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n, \quad \partial_j f(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_j^2} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Si X est point critique, alors tous les x_j sont donc égaux à

$$t = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}}.$$

Réciproquement, si tous les x_j sont égaux à un réel $t > 0$, on vérifie que X annule toutes les dérivées partielles de f.
Les points critiques de f sont donc les points de la forme $X = (t, \ldots, t)$, $t > 0$.

Exercice 15

Question 2

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique aux vecteurs y et z de coordonnées $y_k = \sqrt{x_k}$ et $z_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, on obtient :

$$\forall X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad n^2 = \langle y, z \rangle^2 \leqslant \|y\|^2 \|z\|^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\Big) = f(X),$$

avec égalité si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = tz$, i.e. $x_k = t$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Comme $f(t, \ldots, t) = n^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction f admet donc un minimum global égal à n^2 en chacun de ses points critiques.

Exercice 17

Question 1

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^1$, avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \partial_1 f(x, y) = \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Par ailleurs, la fonction partielle $u : x \longmapsto f(x, 0) = 0$ est dérivable en 0 d'où l'existence de $\partial_1 f(0, 0) = u'(0) = 0$.
Ainsi f admet sur $\mathbb{R}^2$ la dérivée partielle

$$\partial_1 f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{cases} \dfrac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

dont il reste à justifier la continuité à l'origine.

Or, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, en notant $r = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$|\partial_1 f(x, y)| \leqslant \frac{|y| \left(|x|^4 + |y|^4 + 4x^2y^2\right)}{(x^2 + y^2)^2} \leqslant \frac{r(r^4 + r^4 + 4r^4)}{r^4} = 6r \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

d'où, par encadrement,

$$\partial_1 f(x, y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\neq(0,0)}]{} 0 = \partial_1 f(0, 0)$$

et $\partial_1 f$ est continue en $(0, 0)$ donc finalement sur $\mathbb{R}^2$.

On observe par ailleurs que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = -f(y,x)$$

d'où l'existence de

$$\partial_2 f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto -\partial_1 f(y,x) = \begin{cases} \dfrac{x(x^4 - y^4 - 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

également continue sur $\mathbb{R}^2$.
La fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 17

Question 2

Calcul de $\partial^2_{1,2} f(0,0)$
La fonction partielle

$$v : x \longmapsto \partial_2 f(x,0) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} = x$$

est dérivable en 0, d'où l'existence de $\partial^2_{1,2} f(0,0) = v'(0) = 1$.

Calcul de $\partial^2_{2,1} f(0,0)$
La fonction partielle

$$w : y \longmapsto \partial_1 f(0,y) = \begin{cases} -y & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} = -y$$

est dérivable en 0, d'où l'existence de $\partial^2_{2,1} f(0,0) = w'(0) = -1$.

On constate que $\partial^2_{1,2} f(0,0) \neq \partial^2_{2,1} f(0,0)$. Par contraposition du théorème de Schwarz, on en déduit que la fonction f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 18

Soient $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.
Pour $i \in [\![1,n]\!]$, la formule de Leibniz donne

$$\partial_i^2(fg) = (\partial_i^2 f)g + 2(\partial_i f)(\partial_i g) + f(\partial_i^2 g).$$

On en déduit immédiatement la formule attendue :

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= \sum_{i=1}^n \partial_i^2(fg) = \sum_{i=1}^n (\partial_i^2 f)g + 2\sum_{i=1}^n (\partial_i f)(\partial_i g) + \sum_{i=1}^n f(\partial_i^2 g) \\ &= (\Delta f)g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + f(\Delta g). \end{aligned}$$

Exercice 19

Question 1

La fonction

$$f : (x,y) \longmapsto xy + \mathrm{e}^y$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^2$. En un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, elle admet pour gradient :

$$\nabla f(x,y) = \big(\partial_1 f(x,y), \partial_2 f(x,y)\big) = (y, x + \mathrm{e}^y)$$

et pour hessienne :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(x,y) & \partial^2_{1,2} f(x,y) \\ \partial^2_{2,1} f(x,y) & \partial^2_{2,2} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mathrm{e}^y \end{pmatrix}.$$

En particulier :

$$\nabla f(0,0) = (0,1) \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où le développement limité de f à l'ordre 2 en $A = (0,0)$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \langle \nabla f(0,0), (x,y)\rangle + \frac{1}{2} q_{(0,0)}(x,y) + o\big(\|(x,y)\|^2\big) \\ &= 1 + y + xy + \frac{1}{2}y^2 + o(x^2+y^2) \end{aligned}$$

lorsque $(x,y) \to (0,0)$.

Exercice 19

Question 2

La fonction

$$f : (x,y) \longmapsto \mathrm{e}^{x^2-1}\cos y$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^2$. En un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, elle admet pour gradient :

$$\nabla f(x,y) = (2x\mathrm{e}^{x^2-1}\cos y, -\mathrm{e}^{x^2-1}\sin y) = \mathrm{e}^{x^2-1}(2x\cos y, -\sin y)$$

et pour hessienne :

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x,y) &= \begin{pmatrix} (4x^2+2)\mathrm{e}^{x^2-1}\cos y & -2x\mathrm{e}^{x^2-1}\sin y \\ -2x\mathrm{e}^{x^2-1}\sin y & -\mathrm{e}^{x^2-1}\cos y \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{x^2-1}\begin{pmatrix} 2(2x^2+1)\cos y & -2x\sin y \\ -2x\sin y & -\cos y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En particulier :

$$\nabla f(1,0) = (2,0) \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où le développement limité de f à l'ordre 2 en $A = (1,0)$:

$$\begin{aligned} f(1+h,k) &= f(1,0) + \langle \nabla f(1,0), (h,k)\rangle + \frac{1}{2} q_{(1,0)}(h,k) + o\big(\|(h,k)\|^2\big) \\ &= 1 + 2h + 3h^2 - \frac{1}{2}k^2 + o(h^2+k^2) \end{aligned}$$

lorsque $(h,k) \to (0,0)$. Ou encore :

$$f(x,y) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 - \frac{1}{2}y^2 + o\big((x-1)^2 + y^2\big)$$

lorsque $(x,y) \to (1,0)$.

Exercice 20
Question 1.a

L'ensemble $\mathcal{U}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque, par la fonction $(x,y) \longmapsto y$, continue sur $\mathbb{R}^2$, de l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$.

Exercice 20
Question 1.b

La fonction F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ par opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^2$ avec, pour tout $(x,y) \in \mathcal{U}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'\Big(x+\frac{1}{y}\Big) + g'\Big(x-\frac{1}{y}\Big)$$

ainsi que :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{y^2}f'\Big(x+\frac{1}{y}\Big) + \frac{1}{y^2}g'\Big(x-\frac{1}{y}\Big)$$

puis :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = f''\Big(x+\frac{1}{y}\Big) + g''\Big(x-\frac{1}{y}\Big)$$

ainsi que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{y^3}f'\Big(x+\frac{1}{y}\Big) - \frac{2}{y^3}g'\Big(x-\frac{1}{y}\Big) + \frac{1}{y^4}f''\Big(x+\frac{1}{y}\Big) + \frac{1}{y^4}g''\Big(x-\frac{1}{y}\Big).$$

On vérifie alors à partir de ces expressions que F satisfait bien à la relation ci-dessous :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) - y^4\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) - 2y^3\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Exercice 20
Question 2.a

L'ensemble $\mathcal{V}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque, par la fonction $(s,t) \longmapsto s-t$, continue sur $\mathbb{R}^2$, de l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$.

Exercice 20
Question 2.b

La fonction G est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{V}$ par opérations (HP) sur les fonctions $\mathscr{C}^2$ avec, pour tout $(s,t) \in \mathcal{V}$:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(s,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}\Big(\frac{s+t}{2},\frac{2}{s-t}\Big) + \frac{2}{(s-t)^2}\frac{\partial F}{\partial y}\Big(\frac{s+t}{2},\frac{2}{s-t}\Big)$$

puis :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial s\partial t}(s,t) = {} & \frac{1}{4}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big(\frac{s+t}{2},\frac{2}{s-t}\Big) - \frac{1}{2}\frac{2}{(s-t)^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\Big(\frac{s+t}{2},\frac{2}{s-t}\Big) \\ & + \frac{2}{(s-t)^2}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\Big(\frac{s+t}{2},\frac{2}{s-t}\Big) - \frac{4}{(s-t)^4}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big(\frac{s+t}{2},\frac{2}{s-t}\Big) \\ & - \frac{4}{(s-t)^3}\frac{\partial F}{\partial y}\Big(\frac{s+t}{2},\frac{2}{s-t}\Big).\end{aligned}$$

En notant

$$\begin{cases} x = \frac{s+t}{2} \\ y = \frac{2}{s-t} \end{cases},$$

on a donc :

$$4\frac{\partial^2 G}{\partial s\partial t}(s,t) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) - y^4\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) - 2y^3\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$$

par hypothèse.

Exercice 20
Question 2.c

Pour $t \in \mathbb{R}$ donné, la fonction $s \longmapsto \frac{\partial G}{\partial t}(s,t)$ présente ainsi une dérivée nulle sur l'intervalle $]t,+\infty[$. Elle y est donc constante : il existe un réel $k(t)$ tel que :

$$\forall s > t, \quad \frac{\partial G}{\partial t}(s,t) = k(t).$$

La fonction $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie est nécessairement de classe $\mathscr{C}^1$ car :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad k(t) = \frac{\partial G}{\partial t}(t+1,t)$$

avec G de classe $\mathscr{C}^2$ d'après **b.**.

En notant g une primitive de la fonction k, il existe de même une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (s,t) \in \mathcal{V}, \quad G(s,t) = f(s) + g(t).$$

Les fonctions f et g ainsi définies sont nécessairement de classe $\mathscr{C}^2$.

Enfin, pour $(x,y) \in \mathcal{U}$ et $(s,t) \in \mathcal{V}$,

$$\begin{cases} x = \frac{s+t}{2} \\ y = \frac{2}{s-t} \end{cases} \iff \begin{cases} s+t = 2x \\ s-t = \frac{2}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} s = x + \frac{1}{y} \\ t = x - \frac{1}{y} \end{cases}$$

si bien qu'on a donc :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U}, \quad F(x,y) = f\Big(x+\frac{1}{y}\Big) + g\Big(x-\frac{1}{y}\Big).$$

Exercice 21

Question 1.a

La fonction partielle $u : t \longmapsto f(A+tH)$ est bien définie sur le segment $[0,1]$ car, pour $t \in [0,1]$, $\|(A+tH)-A\| = |t|\,\|H\| \leqslant \|H\| < r$ si bien que $A+tH \in \mathcal{B}(A,r) \subset \mathcal{U}$.

Exercice 21

Question 1.b

Puisque f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{U}$, la fonction partielle $u : t \longmapsto f(A+tH)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ avec :

$$\forall t \in [0,1], \quad u'(t) = \langle \nabla f(A+tH), H\rangle = \sum_{j=1}^{n} h_j \partial_j f(A+tH)$$

et :

$$\forall t \in [0,1], \quad u''(t) = \sum_{j=1}^{n} h_j \Big(\sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i(\partial_j f)(A+tH)\Big)$$
$$= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} h_i h_j \partial^2_{i,j} f(A+tH) = q_{A+tH}(H).$$

Exercice 21

Question 1.c

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à u sur le segment $[0,1]$, on obtient :

$$u(1) = u(0) + u'(0) + \int_0^1 (1-t)u''(t)\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire :

$$f(A+H) = f(A) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(A) h_j + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} h_i h_j \int_0^1 (1-t)\partial^2_{i,j} f(A+tH)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 21

Question 2.a

En écrivant que $\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, il vient d'après **1.c.** :

$$f(A+H) - f(A) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(A) h_j - \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \partial^2_{i,j} f(A) h_i h_j =$$
$$= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} h_i h_j \int_0^1 (1-t)\partial^2_{i,j} f(A+tH)\,\mathrm{d}t$$
$$- \Big(\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t\Big) \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} h_i h_j \partial^2_{i,j} f(A)$$
$$= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} h_i h_j \int_0^1 (1-t)\big(\partial^2_{i,j} f(A+tH) - \partial^2_{i,j} f(A)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 21

Question 2.b

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la continuité de la fonction $\partial^2_{i,j} f$ au point A assure l'existence d'un réel $\varrho_{i,j} \in]0,r[$ tel que

$$\forall X \in \mathcal{B}(A, \varrho_{i,j}), \quad \big|\partial^2_{i,j} f(X) - \partial^2_{i,j} f(A)\big| \leqslant \frac{2\varepsilon}{n^2}.$$

Il suffit de considérer le réel $\varrho = \min_{1\leqslant i,j\leqslant n} \varrho_{i,j} > 0$.

Exercice 21

Question 2.c

Pour $H \in \mathcal{B}(0, \varrho)$,

$$\Big|f(A+H) - f(A) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(A) h_j - \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \partial^2_{i,j} f(A) h_i h_j\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \Big| h_i h_j \int_0^1 (1-t)\big(\partial^2_{i,j} f(A+tH) - \partial^2_{i,j} f(A)\big)\,\mathrm{d}t\Big|$$
$$\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \|H\|^2 \int_0^1 (1-t)\big|\partial^2_{i,j} f(A+tH) - \partial^2_{i,j} f(A)\big|\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \Big(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{2\varepsilon}{n^2} \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t\Big) \|H\|^2 = \varepsilon \|H\|^2,$$

car $|h_i| \leqslant \|H\|$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, d'où le résultat.

Exercice 22

Étant donné un vecteur $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on considère la fonction partielle $u : t \longmapsto f(A+tV)$, de classe $\mathscr{C}^2$.
En appliquant le développement limité de f à $H = tV$ lorsque $t \to 0$, on obtient :

$$u(t) = f(A+tV) = \alpha + t\langle U, V\rangle + \frac{t^2}{2}{}^t VSV + o(t^2), \quad t \to 0.$$

Par unicité du développement limité pour les fonctions d'une variable, il en ressort que :

- $\alpha = u(0) = f(A)$;
- $\langle U, V\rangle = u'(0) = \partial_V f(A) = \langle \nabla f(A), V\rangle$, formule valable pour tout $V \in \mathbb{R}^n$, d'où il ressort que $U = \nabla f(A)$;
- ${}^t VSV = u''(0) = \partial^2_V f(A) = q_A(V)$ pour tout $V \in \mathbb{R}^n$, si bien que $S = \nabla^2 f(A)$ par unicité de la matrice symétrique associée à une forme quadratique.